**MATERIAŁY NA XXXII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2011 **Łódź** **str. 67**

O WYKŁADNIKU ŁOJASIEWICZA OSOBLIWOŚCI QUASI-JEDNORODNYCH IZOLOWANYCH

Maciej Sękalski (Kielce)

Abstract. Obliczamy wykładnik Łojasiewicza pewnych klas osobliwości quasi-jednorodnych izolowanych.

1 Osobliwości quasi-jednorodne o małych wykładnikach Łojasiewicza

Wielomian $f = f(z_1, \dots, z_n)$ n zmiennych zespolonych nazywamy *osobliwością izolowaną* w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$, gdy $f(0) = 0$ i istnieje otoczenie U punktu $0 \in \mathbb{C}^n$ takie, że $\{z \in U : \frac{\partial f}{\partial z_1}(z) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial z_n}(z) = 0\} = \{0\}$.

Duże znaczenie w badaniu osobliwości izolowanych mają niezmienniki tych osobliwości. Podstawowym niezmiennikiem jest liczba Milnora

$$\mu_0(f) = \dim_{\mathbb{C}} {}^{\mathbb{C}[[z_1,\dots,z_n]]}\Big/_{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)}$$

zdefiniowana w pracy [M].

Innym ważnym niezmiennikiem osobliwości izolowanej f jest *wykładnik Łojasiewicza* $\mathcal{L}_0(f)$. Jest to najmniejszy wykładnik $\theta > 0$ taki, że istnieje otoczenie U punktu $0 \in \mathbb{C}^n$ oraz stała $c > 0$, dla których zachodzi nierówność

$$|\nabla f(z)| \geqslant c|z|^\theta \quad \text{dla wszystkich } z \in U,$$

gdzie ∇f oznacza gradient osobliwości f, a $|\cdot|$ jest normą w przestrzeni $\mathbb{C}^n$. Wykładnik Łojasiewicza został zdefiniowany przez Teissiera w [T]. Teissier podał również podstawowe własności $\mathcal{L}_0(f)$. Hipoteza Teissiera, która mówi, że $\mathcal{L}_0(f)$ podobnie jak liczba Milnora $\mu_0(f)$ jest niezmiennikiem topologicznym osobliwości jest wciąż nierozstrzygnięta.

Szeroką klasę osobliwości stanowią wielomiany quasi-jednorodne. Niech $(w_1, \ldots, w_n)$ będzie ciągiem dodatnich liczb wymiernych. Wielomian $f = f(z_1, \ldots, z_n)$ nazywamy *quasi-jednorodnym* typu $(w_1, \ldots, w_n)$, gdy f jest sumą jednomianów postaci $cz_1^{a_1} \cdot \dots \cdot z_n^{a_n}$ $(c \neq 0)$, gdzie $\frac{a_1}{w_1} + \cdots + \frac{a_n}{w_n} = 1$.

Jeżeli wielomian quasi-jednorodny f typu $(w_1, \ldots, w_n)$ jest osobliwością izolowaną, to $w_i > 1$ dla $i = 1, \ldots, n$. W pracy [MO] autorzy udowodnili, że liczba Milnora osobliwości f, izolowanej oraz quasi-jednorodnej typu $(w_1, \ldots, w_n)$ zależy tylko od wag $w_1, \ldots, w_n$, mianowicie

$$\mu_0(f) = \prod_{i=1}^{n}(w_i - 1). \tag{1}$$

Ponadto T. Krasiński, G. Oleksik and A. Płoski w [KOP] pokazali, że

$$\mathcal{L}_0(f) \leqslant \min\left\{\max_{i=1}^{n}(w_i - 1), \prod_{i=1}^{n}(w_i - 1)\right\} \tag{2}$$

przy czym równość zachodzi, gdy $n = 2$ lub $n = 3$. Jak pokazuje Przykład z pracy [S2], dla $n > 3$ nierówność w (2) może być ostra:

Przykład 1.1 ([S2], Przykład.) Dla osobliwości $f = z_1 z_4 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^5$ typu $\left(\frac{5}{4}, 3, 3, 5\right)$ mamy:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(f) = 2 < \min\left\{\max_{i=1}^{4}(w_i - 1), \prod_{i=1}^{4}(w_i - 1)\right\} = \\ = \min\left\{\max\left\{\frac{1}{4}, 2, 2, 4\right\}, \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2\cdot 4\right\} = 4.\end{aligned}$$

Niech $H(w_1, \ldots, w_n)$ będzie zbiorem wszystkich osobliwości izolowanych quasi-jednorodnych typu $(w_1, \ldots, w_n)$. Jeżeli $H(w_1, \ldots, w_n) \neq \emptyset$, to można zapytać jak obliczyć $\mathcal{L}_0(f)$ dla $f \in H(w_1, \ldots, w_n)$ (jeśli hipoteza Teissiera jest prawdziwa, to z formuły (1) Milnora-Orlika wynika, że wykładnik Łojasiewicza $\mathcal{L}_0(f)$ jest stały dla $f \in H(w_1, \ldots, w_n)$).

Przykład 1.2 Niech $d > 1$ będzie liczbą całkowitą. Wtedy $H(d, \dots, d)$ jest przestrzenią wielomianów jednorodnych stopnia d i $\mathcal{L}_0(f) = d - 1$ dla $f \in H(d, \dots, d)$.

Jeżeli $n \leqslant 3$, to $\mathcal{L}_0(f) = \min\{\max_{i=1}^n(w_i - 1), \prod_{i=1}^n(w_i - 1)\}$ dla $f \in H(w_1, w_2, w_3)$ (patrz [KOP], Theorem 3). Udowodnimy

Twierdzenie 1.3 *Załóżmy, że $H(w) \neq \emptyset$, $w = (w_1, \dots, w_n)$ i przyjmijmy $r(w) = 2 \cdot \sharp\{i : w_i < 2\} + \sharp\{i : w_i = 2\}$. Wtedy $\prod_{i=1}^{n}(w_i - 1) \geqslant 2^{n-r(w)}$, ponadto $r(w) = n$ dokładnie wtedy, gdy $\mathcal{L}_0(f) = 1$.*
Jeżeli $r(w) < n$, to

(i) jeśli $\prod_{i=1}^{n}(w_i - 1) = 2^{n-r(w)}$, to $\mathcal{L}_0(f) = 2$ dla $f \in H(w)$,

(ii) jeśli $\prod_{i=1}^{n}(w_i - 1) = 2^{n-r(w)} + 1$, to $\mathcal{L}_0(f) = 3$ dla $f \in H(w)$.

Dowód twierdzenia 1.3 podajemy w §2 tego artykułu.

Przykład 1.1 pokazuje, że $H\left(\frac{5}{4}, 3, 3, 5\right) \neq \emptyset$. Z części *(i)* Twierdzenia 1.3 otrzymujemy $\mathcal{L}_0(f) = 2$ dla wszystkich $f \in H(\frac{5}{4}, 3, 3, 5)$.

2 Dowód twierdzenia 1.3

Niech $\mathrm{Hess}_0(f)$ oznacza macierz Hessego f w punkcie 0.

Lemat 2.1 *Załóżmy, że $f = f(z_1, \dots, z_n)$ jest osobliwością izolowaną w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$ i niech $r = \operatorname{rank}\mathrm{Hess}_0(f) < n$. Wtedy $\mu_0(f) \geqslant 2^{n-r}$ oraz*
(i) jeżeli $\mu_0(f) = 2^{n-r}$, to $\mathcal{L}_0(f) = 2$,
(ii) jeżeli $\mu_0(f) = 2^{n-r} + 1$, to $\mathcal{L}_0(f) = 3$.

Dowód. Wystarczy zastosować lemat 3.13 z pracy [P] do gradientu ∇f.

Lemat 2.2 *Niech $f = f(z_1, \dots, z_n)$ będzie osobliwością izolowaną quasi-jednorodną typu $(w_1, \dots, w_n)$. Wtedy*

$$\operatorname{rank}\mathrm{Hess}_0(f) = 2 \cdot \sharp\{i : w_i < 2\} + \sharp\{i : w_i = 2\}.$$

Dowód. Dowód podany jest w [S1], Theorem 1.
Dowód twierdzenia 1.3. Z formuły (1) Milnora-Orlika, lematu 2.2 oraz nierówności $\mu_0(f) \geqslant 2^{n-r}$ otrzymujemy $\prod_{i=1}^{n}(w_i - 1) \geqslant 2^{n-r(w)}$. Z lematu 2.2 $r(w) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{rank}\mathrm{Hess}_0(f) = n$. Jeżeli $\operatorname{rank}\mathrm{Hess}_0(f) = n$, to łatwo sprawdzić, że $\mathcal{L}_0(f) = 1$ ([P], Corollary 3.8). Z drugiej strony jeśli $\mathcal{L}_0(f) = 1$, to z nierówności $\mu_0(f) \leqslant [\mathcal{L}_0(f)]^n = 1$ (cf. [P], Proposition 3.2, $[\cdot]$ oznacza część całkowitą) wynika, że $\mu_0(f) = 1$ a stąd $\operatorname{rank}\mathrm{Hess}_0(f) = n$.

Aby udowodnić *(i)* oraz *(ii)* wystarczy zastosować lemat 2.1 ponieważ z lematu 2.2 wynika, że $\operatorname{rank}\mathrm{Hess}_0(f) = r(w)$.

Przykład 2.3 (see [B-AE], Example 4.17) Niech $f = z_1 z_3 + z_2^2 + z_1^2 z_2$. Wielomian f jest quasi-jednorodny typu $w = (4, 2, \frac{4}{3})$. Mamy

$$r(w) = 2 \cdot \sharp\{i : w_i < 2\} + \sharp\{i : w_i = 2\} = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \text{ oraz } n = 3.$$

Zatem $\mathcal{L}_0(f) = 1$.

Przykład 2.4 Wielomian $f = z_1 z_3 + z_2^4 + z_3^5$ jest quasi-jednorodny typu $w = (\frac{5}{4}, 4, 5)$. Mamy $r = 2 \cdot \sharp\{i : w_i < 2\} + \sharp\{i : w_i = 2\} = 2 \cdot 1 + 0 = 2$ oraz $n = 3$, zatem $\prod_{i=1}^{3}(w_i - 1) = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 4 = 3 = 2^{n-r} + 1$. Z twierdzenia 1.3 *(ii)* otrzymujemy $\mathcal{L}_0(f) = 3$.

Autor dziękuje Profesorowi Arkadiuszowi Płoskiemu za dużą pomoc w przygotowaniu tej noty.

Literatura

[B-AE] C. Bivià-Ausina, S. Encinas, *The Łojasiewicz exponenet of a set of weighted homogeneous ideals*, Journal of Pure and Applied Algebra (2010), doi: 10.1016/j.jpaa.2010.06.008.

[KOP] T. Krasiński, G. Oleksik, A. Płoski, *The Łojasiewicz exponent of an isolated weighted homogeneous surface singularity*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (10) (2009) 3387-3397.

[M] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies 61, Princeton University Press, 1968.

[MO] J. Milnor, P. Orlik, *Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials*, Topology 9 (1970) 385-393.

[P] A. Płoski, *Multiplicity and the Łojasiewicz exponent*, Singularities, Banach Center Publications vol. 20, PWN, Warszawa (1988), pp. 353-364.

[S1] M. Sękalski, *On the Hesse matrix of a quasi-homogeneous isolated singularity*, Univ. Iag. Acta Math., Fasc. XLVII (2009), pp. 317-320.

[S2] M. Sękalski, *O wykładniku Łojasiewicza form quasijednorodnych*, Materiały na XXXI Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź, 2010, 27-29.

[T] B. Teissier, *Variétés polaires: I – Invariant polaires de singularités d'hypersurfaces*, Invent. Math. 40 (1977), 267-292.

On the Łojasiewicz exponent of quasi-homogeneous isolated singularities

Summary. We compute the Łojasiewicz exponent for some classes of quasi-homogeneous isolated singularities.

Politechnika Świętokrzyska,
Katedra Matematyki,
25-314 Kielce, Al. 1000-lecia PP 7,
E-mail: matms@tu.kielce.pl

Łódź, 10 – 14 stycznia 2011 r.