Sumy kwadratów a wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności

G. S. wspólnie z
K. Kurdyka, B. Osińska-Ulrych, S. Spodzieja

Uniwersytet Łódzki

Łódź 2013

E. Artin (1927) – rozwiązanie 17-tego problemu Hilberta

Niech R będzie ciałem rzeczywiście domkniętym i niech $R[x] = R[x_1, \dots, x_n]$. Jeśli $f \in R[x]$, $f(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in R^n$, to

$$f \cdot h^2 = h_1^2 + \cdots + h_r^2,$$

dla pewnych wielomianów $h, h_1, \dots, h_r \in R[x]$, $h \neq 0$.

Przykład (T. Motzkin, 1967)

Istnieje nieujemny wielomian $f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2 - 3)$, który nie jest sumą kwadratów wielomianów.

Znane są również uogólnienia powyższego twierdzenia Artina (również na zbiorach semialgebraicznych), tzw. Stellensätze:

Real Nullstellensatz (J. L. Krivine, 1964)

Niech $I \subset R[x]$ będzie ideałem. Wówczas $f(x) = 0$ dla $x \in V(I)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f^{2N} + q_1^2 + \cdots + q_m^2 \in I \quad \text{dla pewnych} \quad q_1, \dots, q_m \in R[x] \quad \text{i} \quad N \in \mathbb{N}.$$

Niech $X \subset R^n$ będzie *domknietym bazowym zbiorem semiaglebraicznym*, czyli

$$X = \{x \in R^n : \ g_1(x) \geqslant 0, \dots, g_r(x) \geqslant 0\}, \quad \text{gdzie} \quad g_1, \dots, g_r \in R[x]$$

oraz niech $T(g_1, \dots, g_r)$ będzie *preporządkiem generowanym przez* $g_1, \dots, g_r$, czyli

$$T(g_1, \dots, g_r) = \left\{ \sum_{e=(e_1,\dots,e_r)\in\{0,1\}^r} s_e g_1^{e_1} \cdots g_r^{e_r} : \ s_e \in R[x]^2, \ e \in \{0,1\}^r \right\},$$

gdzie $R[x]^2 = \{\sum_{i=1}^m f_i^2 : \ f_1, \dots, f_m \in R[x], \ m \in \mathbb{N}\}$.

Positivstellensatz (G. Stengle, 1974)

Niech $f \in R[x]$. Wówczas $f > 0$ na X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$s \cdot f = 1 + t \quad \text{dla pewnych} \quad s, t \in T(g_1, \dots, g_r).$$

Nichtnegativstellensatz (G. Stengle, 1974)

Niech $f \in R[x]$. Wówczas $f \geqslant 0$ na X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$s \cdot f = f^{2N} + t \quad \text{dla pewnych} \quad s, t \in T(g_1, \dots, g_r) \quad \text{i} \quad N \in \mathbb{N}.$$

Problem

Oszacować liczbę r wielomianów i stopień wielomianu h w twierdzeniu Artina; oszacować liczbę N i stopnie wielomianów $q_1, \dots, q_m$ oraz wielomianów s i t w powyższych Stellensätzach.

Schmüdgen Positivstellensatz (K. Schmüdgen, 1991)

Załóżmy, że zbiór semialgebraiczny $X = \{x \in R^n : \ g_1(x) \geqslant 0, \dots, g_r(x) \geqslant 0\}$ jest zwarty. Wówczas każdy wielomian $f > 0$ na X należy do preporządku $T(g_1, \dots, g_r)$.

Twierdzenie (M. Schweighofer, 2004)

Dla wielomianów $g_1, \ldots, g_m \in \mathbb{R}[x]$ definiujących niepusty zbiór

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : \ g_1(x) \geqslant 0, \ldots, g_m(x) \geqslant 0\} \subset (-1,1)^n,$$

istnieje stała $c \in \mathbb{N}$ o następującej własności: każdy wielomian $f \in \mathbb{R}[x]$ stopnia d o minimum $f^* = \min f(S) > 0$ ma postać

$$\sum_{\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_m)\in\{0,1\}^m} \sigma_\delta \cdot g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m}, \quad \text{gdzie} \quad \sigma_\delta \in \mathbb{R}[x]^2,$$

taką, że $\sigma_\delta = 0$ lub $\deg\left(\sigma_\delta g_1^{\delta_1} \cdots g_m^{\delta_m}\right) \leqslant cd^2 \left(1 + \left(d^2 n^d \frac{\|f\|}{f^*}\right)^c\right)$ dla wszystkich $\delta \in \{0,1\}^m$.

Twierdzenie (L. Bröcker, 1984)

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie afiniczną rozmaitością algebraiczną wymiaru k,

$$S = \{x \in V : \ g_1(x) \geqslant 0, \ldots, g_r(x) \geqslant 0\},$$

gdzie $g_1, \ldots, g_r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$. Wówczas istnieje m wielomianów $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ takich, że

$$S = \{x \in V : \ f_1(x) \geqslant 0, \ldots, f_m(x) \geqslant 0\}$$

oraz

$$m \leqslant \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdots k, & \text{gdy } k \text{ jest parzysta} \\ 3 \cdot 5 \cdots k, & \text{gdy } k \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

Twierdzenie (C. Scheiderer, 2003)

Niech C będzie krzywa afiniczną nad $\mathbb{R}$ i niech $T(g_1, \dots, g_r)$ będzie skończenie generowanym preporządkiem $\mathbb{R}[C]$, dla którego zbiór semialgebraiczny $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g_1(x) \geqslant 0, \dots, g_r(x) \geqslant 0\}$ jest wirtualnie zwarty (tzn. istnieją funkcje w $\mathbb{R}[C]$ ograniczone na X i różne od stałej). Niech $f \in \mathbb{R}[C]$ i $f|_X \geqslant 0$ oraz załóżmy, że f ma skończenie wiele zer $z_1, \dots, z_k \in X$. Jeśli $f \in \widehat{T}_{z_i}$ dla $i = 1, \dots, k$ (to znaczy $z_1, \dots, z_k$ są punktami nieosobliwymi krzywej C), to $f \in T$.

Główny rezultat

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, będzie nieograniczonym zbiorem algebraicznym postaci

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g_1(x) = 0, \dots, g_r(x) = 0\}$$

i niech $k \geqslant \max\{\deg g_1, \dots, \deg g_r\}$. Niech $f \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f = d > 0$. Załóżmy, że zbiór $V \cap f^{-1}(0)$ jest zwarty oraz $f(x) > 0$ dla $x \in U \setminus V$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$ jest pewnym otoczeniem V. Wówczas istnieją wielomiany $\sigma_i \in \mathbb{R}[x]^2$ takie, że

$$h := f + \sum_{i=1}^{r} \sigma_i g_i^2 \geqslant 0 \quad \text{w} \quad \mathbb{R}^n,$$

oraz

$$\deg(\sigma_i) \leqslant p \quad \text{dla} \quad i \in \{1, \dots, r\},$$

gdzie p jest najmniejszą liczbą parzystą taką, że

$$p \geqslant d + 2k(12k-3)^{n-1}(d + 2 - \mathcal{L}_\infty(f|V)).$$

Ponadto $\mathcal{L}_\infty(f|V) = \mathcal{L}_\infty(h)$.

Przykład

Niech $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y^3 = 0\}$ i niech $f(x, y) = y$. Wówczas $f \geqslant 0$ na V i dla każdego wielomianu $h \in \mathbb{R}[x, y]$ znikającego na V istnieje punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ taki, że

$$f(x_0, y_0) + h(x_0, y_0) < 0,$$

gdyż przy powyższych założeniach $h(x, y) = (x^2 - y^3)h_1(x, y)$ oraz

$$f(0, y) + h(0, y) = y - y^3 h_1(0, y),$$

więc funkcja $y \mapsto f(0, y) + h(0, y)$ zmienia znak w punkcie $y = 0$.

Wniosek 1

Niech V będzie nierozkładalnym zbiorem algebraicznym postaci $V = \{x \in \mathbb{R}^n : \ h_1(x) = \ldots = h_r(x) = 0\}$. Niech $f \in \mathbb{R}[x]$, $f \geqslant 0$ na V, $f|_V \neq 0$. Wówczas

$$f(x)f^p(x) = -h(x) + \sigma(x),$$

gdzie $\sigma \in \mathbb{R}(x)^2$, a $-h \in T$ jest postaci

$$\begin{aligned} -h(x) = &\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} f^p(x) h_i(x) \cdot (-h_i(x))(x_j - \xi_j)^p \\ &+ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i h_i(x) \cdot (-h_i(x))(1 - \xi_{n+1} f(x))^p, \quad x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \end{aligned}$$

gdzie $\alpha_{i,j}$, α_i są liczbami dodatnimi, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ jest dowolnym punktem V, $\xi_{n+1} \in \mathbb{R}$ oraz p jest dodatnią liczbą parzystą taką, że

$$p \leqslant d + 2 + (2k + 4)(12k - 21)^n (d + 2 + D(6D - 3)^n),$$

gdzie $k = \max\{\deg g_1, \ldots, \deg g_r\}$, $d = \deg f$ i $D = \max\{k, d + 1\}$.

Niech $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ i $1 \leqslant j \leqslant r$ oraz

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) > 0, \dots, g_j(x) > 0, g_{j+1}(x) \geqslant 0, \dots, g_r(x) \geqslant 0\}.$$

Połóżmy $h_i(x, y) = g_i(x)y_i^2 - 1$ dla $i = 1, \dots, j$ i $h_i(x, y) = g_i(x) - y_i^2$ dla $i = j + 1, \dots, r$. Niech
$T_1 = T(h_1, -h_1, \dots, h_r, -h_r) \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r]$.

Wniosek 2

Niech $f \in \mathbb{R}[x]$, $f > 0$ na X. Wówczas $f = -h + \sigma$, gdzie $\sigma \in \mathbb{R}(x, y)^2$, a $-h \in T_1$ jest postaci

$$-h(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n+r} \alpha_{i,j} h_i(x, y) \cdot (-h_i(x, y))(w_j - \xi_j)^p, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r,$$

gdzie $\alpha_{i,j}$ sa liczbami dodatnimi,
$(w_1, \dots, w_{n+r}) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_r)$,
$(\xi_1, \dots, \xi_{n+r})$ jest dowolnym punktem $Y = V(h_1, \dots, h_r)$ oraz p jest dodatnią liczbą parzystą taką, że

$$p \leq d + 2 + (2k + 4)(12k - 21)^{n+r-1}(d + 2 + D(6D - 3)^{n+r-1}),$$

gdzie $k = \max\{\deg g_1, \dots, \deg g_r\}$, $d = \deg f$ i $D = \max\{k + 2, d\}$.

Dowód głównego rezultatu opiera się na własnościach wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności oraz dwóch następujących twierdzeniach:

Twierdzenie (Kurdyka, Spodzieja, 2011)

Niech $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym stopnia d. Wówczas dla pewnej stałej $C > 0$,

$$|F(x)| \geqslant C \left(\frac{\operatorname{dist}(x, F^{-1}(0))}{1 + |x|^2} \right)^{d(6d-3)^{n-1}} \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Twierdzenie (Kurdyka, Spodzieja, Szlachcińska, 2012)

Niech $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym o zwartym zbiorze zer i niech $n \leqslant k \leqslant m$. Wówczas dla dowolnego odwzorowania liniowego $L \in \mathbf{L}(m, k)$ takiego, że $(L \circ F)^{-1}(0)$ jest zwarty, mamy

$$\mathcal{L}_\infty(F) \geqslant \mathcal{L}_\infty(L \circ F).$$

Ponadto, dla generycznego $L \in \mathbf{L}(m, k)$ zbiór $(L \circ F)^{-1}(0)$ jest zwarty i

$$\mathcal{L}_\infty(F) = \mathcal{L}_\infty(L \circ F).$$

Bibliografia

E. Artin
Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate.
Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5, (1927), 100–115.

J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy
Real Algebraic Geometry.
Springer-Verlag, Berlin, 1998.

Bröcker
Minimale Erzeugung von Positivbereichen.
Geom. Dedicata 16 (1984), no. 3, 335-350.

D. W. Dubois
Anullstellensatz for ordered fields.
Ark.Mat. 8 1969 111–114 (1969).

J.-L. Krivine
Anneaux préordonnés.
J. Analyse Math. 12 1964 307–326.

Sumy kwadratów

M. Marshall
Positive polynomials and sums of squares.
Mathematical Surveys and Monographs, 146. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

T. S. Motzkin
The arithmetic-geometric inequality.
In: Inequalities (Ed. O. Shisha) Academic Press (1967), 205-224.

A. Prestel, Ch. N. Delzell
Positive polynomials. From Hilbert's 17th problem to real algebra.
Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

J. J. Risler
Une caractérisation des idéaux des variétés algébriques réelles.
C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 271 (1970).

C. Scheiderer
Positivity and sums of squares: a guide to recent results.
Emerging applications of algebraic geometry, 271–324, IMA Vol. Math. Appl., 149, Springer, New York, 2009.

K. Schmüdgen
The K-moment problem for compact semi-algebraic sets.
Math. Ann. 289 (1991), no. 2, 203–206.

M. Schweighofer
On the complexity of Schmüdgen Positivstellensatz.
Journal of Complexity 20 (2004), 529–543.

G. Stengle
A nullstellensatz and positivstellensatz in semialgebraic geometry.
Math. Ann. 207:87-97 (1974).