**MATERIAŁY XIX KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

1998 **Łódź** **str. 51**

O WŁÓKNACH ODWZOROWAŃ WIELOMIANOWYCH

S. Spodzieja (Łódź)

Wstęp

Niech $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym. W pracy pokazujemy, że badanie włókien tego odwzorowania można sprowadzić do przypadku, gdy $m \leq n$ (twierdzenie 1). Twierdzenie to ma zastosowanie w oszacowaniu wykładnika Łojasiewicza. Jeśli $\#f^{-1}(0) < \infty$, to *wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności odwzorowania* f określamy jako największą liczbę $\nu \in \mathbb{R}$ taką, że istnieją $C > 0$, $R > 0$, że

$$|z| > R \;\Rightarrow\; C|z|^\nu \leq |f(z)|,$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza normę policylindryczną. Wykładnik ten oznaczamy $\mathcal{L}_\infty(f)$.

Kollár w pracy [K] podaje oszacowanie od dołu wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności odwzorowania f. Mianowicie jeśli $\#f^{-1}(0) < \infty$, $d_j = \deg f_j$ oraz $d_1 \geq \ldots \geq d_m > 0$, to

$$(*) \qquad \mathcal{L}_\infty(f) \geq \begin{cases} d_m - d_1 \ldots d_m & \text{gdy } m \leq n \\ d_m - d_1 \ldots d_{n-1} d_m & \text{gdy } m > n. \end{cases}$$

Kollár dowodzi tylko pierwszej części nierówności. Twierdzi (bez uzasadnienia), że druga nierówność wynika z pierwszej. Dowód tego faktu wynika bezpośrednio z twierdzenia 1 (patrz wniosek 2).

Podajemy również odpowiedź na pytanie Profesora Płoskiego dotyczące oszacowania stopnia globalnego włókna odwzorowania f (wniosek 3).

1. Główne twierdzenie

W paragrafie tym podamy główne twierdzenie pracy i wnioski z niego wynikające.

Niech w dalszym ciągu

$$f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m \tag{1}$$

będzie odwzorowaniem wielomianowym takim, że $\deg f_j > 0$, dla $j = 1, ..., m$.

Twierdzenie 1. *Niech f będzie odwzorowaniem wielomianowym postaci (1), gdzie $m > n > 1$. Wówczas istnieje odwzorowanie $g = (g_1, ..., g_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ postaci*

$$g_i = f_i + \sum_{j=n}^{m-1} \alpha_{j,i} f_j, \quad \text{dla } i = 1, ..., n-1, \qquad g_n = f_m, \tag{2}$$

gdzie $\alpha_{j,i} \in \mathbb{C}$ takie, że włókno $f^{-1}(0)$ jest sumą pewnych składowych nierozkładalnych włókna $g^{-1}(0)$. Jeśli dodatkowo $\#f^{-1}(0) < \infty$, to $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$ oraz $\#g^{-1}(0) < \infty$.

Dowód tego twierdzenia podamy w punkcie 2.

Z tego twierdzenia dostajemy łatwo trzy wnioski.

Wniosek 1. *Niech f będzie odwzorowaniem wielomianowym postaci (1), gdzie $m > n > 1$ oraz $\#f^{-1}(0) < \infty$. Wówczas istnieje odwzorowanie wielomianowe $g = (g_1, ..., g_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ postaci (2) takie, że*

$$\#g^{-1}(0) < \infty$$

oraz

$$\mathcal{L}_\infty(f) \geq \mathcal{L}_\infty(g).$$

Dowód. Niech w myśl twierdzenia 1, $g = (g_1, ..., g_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym postaci (2) takim, że $\#g^{-1}(0) < \infty$. Niech $\tilde{f} = (g_1, ..., g_n, f_n, ..., f_{m-1}) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. Łatwo zauważyć, że $f = L \circ \tilde{f}$, gdzie L jest nieosobliwą liniową zamianą zmiennych w $\mathbb{C}^m$. Zatem $\mathcal{L}_\infty(f) = \mathcal{L}_\infty(\tilde{f})$. Oczywiście dla $z \in \mathbb{C}^n$ mamy $|\tilde{f}(z)| \geq |g(z)|$, więc $\mathcal{L}_\infty(\tilde{f}) \geq \mathcal{L}_\infty(g)$. Reasumując mamy tezę.

Wniosek 2. *Nierówność Kollára* $(*)$ *wystarczy udowodnić w przypadku* $m \leq n$.

Dowód. Dla $m > n$ nierówność $(*)$ dostajemy z wniosku 1 i pierwszej części nierówności $(*)$, bowiem wówczas $\deg g_j \leq d_j$ dla $j = 1, ..., n-1$ i $\deg g_m = d_m$.

Niech V będzie zbiorem algebraicznym oraz $V = V_1 \cup \ldots \cup V_k$ rozkładem zbioru V na składowe nierozkładalne. *Stopniem globalnym zbioru* V nazywamy liczbę

$$\delta(V) = \deg V_1 + \ldots + \deg V_k.$$

Wniosek 3. *Niech* f *będzie odwzorowaniem wielomianowym postaci (1),* $d_j = \deg f_j$, $j = 1, ..., m$, $d_1 \geq \ldots \geq d_m > 0$. *Wówczas*

$$\delta(f^{-1}(0)) \leq \begin{cases} d_1 \ldots d_m & \textit{gdy } m \leq n \\ d_1 \ldots d_{n-1} d_m & \textit{gdy } m > n. \end{cases} \tag{3}$$

Dowód. Ze wzoru (4) w [Ł], VII,11,8, wynika, że

$$\delta(f^{-1}(0)) \leq \delta(f_1^{-1}(0)) \ldots \delta(f_m^{-1}(0)) \leq \deg f_1 \ldots \deg f_m.$$

Stąd dostajemy pierwszą część (3). Niech teraz $m > n$. Jeśli $n = 1$, to teza jest oczywista. Niech więc $n > 1$. Wówczas z twierdzenia 1 wynika, że istnieje odwzorowanie wielomianowe $g = (g_1, ..., g_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ takie, że

$$\deg g_j \leq d_j \quad \text{dla } j = 1, ..., n-1, \qquad \deg g_n \leq d_m \tag{4}$$

oraz $f^{-1}(0)$ jest sumą pewnych składowych nierozkładalnych zbioru $g^{-1}(0)$. W myśl pierwszej części $\delta(g^{-1}(0)) \leq \deg g_1 \ldots \deg g_n$. Stąd i z (4) dostajemy drugą część nierówności (3).

2. Dowód twierdzenia 1

Udowodnimy najpierw trzy lematy.

Przez $G_k(\mathbb{C}^m)$ oznaczamy przestrzeń Grassmanna k-wymiarowych podprzestrzeni liniowych przestrzeni $\mathbb{C}^m$, $k < m$ (patrz [Ł], B,§6). Niech $\Delta_k(\mathbb{C}^m) \subset G_k(\mathbb{C}^m)$ będzie zbiorem wszystkich tych k-wymiarowych podprzestrzeni liniowych przestrzeni $\mathbb{C}^m$, które można przedstawić w postaci

$$H_\alpha = \{(w_1, ..., w_m) \in \mathbb{C}^m : w_j + \sum_{i=m-k+1}^{m} \alpha_{j,i} w_i = 0, \ j = 1, ..., m-k\}, \tag{5}$$

gdzie $\alpha = (\alpha_{j,i} : i = m-k+1, ..., m, \ j = 1, ..., m-k) \in \mathbb{C}^N$, $N = k(m-k)$.

Lemat 1. *$\Delta_k(\mathbb{C}^m)$ jest otwartym i gęstym podzbiorem $G_k(\mathbb{C}^m)$, o dopełnieniu algebraicznym.*

Dowód. Wystarczy zauważyć, że $\Delta_k(\mathbb{C}^m)$ jest zbiorem wszystkich podprzestrzeni liniowych $\mathbb{C}^m$ postaci

$$H = \{(w_1, ..., w_m) \in \mathbb{C}^m : \sum_{i=1}^{m} \alpha_{j,i} w_i = 0,\ j = 1, ..., m-k\}, \tag{6}$$

gdzie $\alpha_{j,i} \in \mathbb{C}$, $j = 1, ..., m-k$, $i = 1, ..., m$ są takie, że

$$\det[\alpha_{j,i}]_{j,i=1,\ldots,m-k} \neq 0. \tag{7}$$

Istotnie, każda przestrzeń liniowa postaci (5) jest oczywiście postaci (6). Niech H będzie podprzestrzenia liniową $\mathbb{C}^m$ postaci (6) oraz $A = [\alpha_{j,i}]_{j,i=1,\ldots,m-k}$, $B = [\alpha_{j,i}]_{\substack{j=1,\ldots,m-k \\ i=m-k+1,\ldots,m}}$. Niech $w' = (w_1, ..., w_{m-k})$, $w'' = (w_{m-k+1}, ..., w_m)$. Wówczas z (7) mamy, że A jest macierzą odwracalną, więc

$$\begin{aligned} H =&\{w = (w', w'') \in \mathbb{C}^{m-k} \times \mathbb{C}^k : Aw' + Bw'' = 0\} \\ =&\{w = (w', w'') \in \mathbb{C}^{m-k} \times \mathbb{C}^k : w' + A^{-1}Bw'' = 0\} \in \Delta_k(\mathbb{C}^m). \end{aligned}$$

To kończy dowód.

Lemat 2. *Niech $V \subset \mathbb{C}^m$ będzie zbiorem algebraicznym wymiaru s. Jeśli $s+k < m$, to istnieje otwarty i gęsty podzbiór $U \subset \Delta_k(\mathbb{C}^m)$ taki, że dla każdego $H \in U$ zachodzi*

$$H \cap V \subset \{0\}.$$

Dowód. Niech Γ będzie domknięciem zbioru $\{x \cdot \mathbb{C} : x \in V\}$. Jest to oczywiście podzbiór algebraiczny przestrzeni $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ wymiaru co najwyżej s. Zatem z lematu 1 i wniosku w [Ł], VII,11,8 dostajemy tezę.

Lemat 3. *Niech $V \subset \mathbb{C}^m$ będzie zbiorem algebraicznym wymiaru s. Jeśli $s+k = m$, to istnieje otwarty i gęsty podzbiór $U \subset \Delta_k(\mathbb{C}^m)$ taki, że dla każdego $H \in U$ zachodzi*

$$\#(H \cap V) < \infty.$$

Dowód. Niech $\Gamma_0 = \{x \in V : x \cdot \mathbb{C} \subset V\}$, $\Gamma_1 = \overline{\{x \cdot \mathbb{C} : x \in \Gamma_0\}} \subset \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$, $\Gamma = \overline{\{x \cdot \mathbb{C} : x \in V\}}$. Γ i Γ_1 są oczywiście podzbiorami algebraicznymi $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$, co więcej $\dim \Gamma_1 < s$ oraz $\dim \Gamma \leq s$. Zatem stosując lematy 1, 2 i Proposition 9 w [Ł], VII,11,8 dostajemy tezę.

Dowód twierdzenia 1. Dla dowolnego $\alpha = (\alpha_{j,i} : j = n, ..., m-1,\ i = 1, ..., n-1) \in \mathbb{C}^N$, gdzie $N = (n-1)(m-n)$ określmy odwzorowanie $g_\alpha = (g_1, ..., g_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

postaci (2). Niech $W \subset \mathbb{C}^m$ będzie domknięciem zbioru $f(\mathbb{C}^n)$ oraz $k = \dim W$. Oczywiście $k \leq n$. Niech $V = \{(w_1, ..., w_m) \in W : w_m = 0\}$. Mamy dwa przypadki

1°. $k < n$. Ponieważ $\deg f_m > 0$, więc $\dim V < n-1$. Zatem z lematu 2, istnieje $\alpha \in \mathbb{C}^N$, że dla $H_\alpha \in \Delta_{m-n-1}(\mathbb{C}^{m-1})$ mamy

$$V \cap (H_\alpha \times \{0\}) \subset \{0\}.$$

Wówczas biorąc $g = g_\alpha$ mamy, że $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$, co daje tezę w tym przypadku.

2°. $k = n$. Wówczas $\dim V \leq n - 1$. Niech

$$\Gamma = \overline{\{w \in V : \dim f^{-1}(w) > 0\}}.$$

Jest to w myśl [M], Corollary 3.16 i Proposition 2.31 zbiór algebraiczny. Ponadto $\dim \Gamma < n-1$, gdyż w przeciwnym przypadku z określenia zbioru Γ i [M], Corollary 3.15 mielibyśmy

$$n \leq \dim f^{-1}(\Gamma) \leq \dim f^{-1}(V) < n,$$

co jest niemożliwe. Zatem z lematów 1 i 2, istnieje $\alpha \in \mathbb{C}^N$, że dla $H_\alpha \in \Delta_{m-n-1}(\mathbb{C}^{m-1})$ mamy

$$\#(V \cap (H_\alpha \times \{0\})) < \infty \tag{8}$$

oraz

$$(\Gamma \cap (H_\alpha \times \{0\})) \subset \{0\}. \tag{9}$$

Niech wobec (8), $V \cap (H_\alpha \times \{0\}) = \{z_1, ..., z_p\}$. Wówczas

$$g_\alpha^{-1}(0) = f^{-1}(z_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(z_p).$$

Zatem biorąc $g = g_\alpha$ mamy, że $f^{-1}(0)$ jest sumą pewnych składowych nierozkładalnych zbioru $g^{-1}(0)$. Jeśli $\#f^{-1}(0) < \infty$, to w myśl (9) każdy zbiór $f^{-1}(z_1)$,..., $f^{-1}(z_p)$ jest skończony. To daje tezę w tym przypadku i kończy dowód twierdzenia 1.

Bibliografia

[K] J. Kollár, *Sharp effective Nullstellensatz*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 963–975.

[Ł] S. Łojasiewicz, *Introduction to complex analytic geometry*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1991.

[M] D. Mumford, *Algebraic geometry I, Complex projective varieties*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

On fibres of polynomial mappings

Summary. We show that investigations of fibers of polynomial mappings $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ can be reduced to the ones, where $m \leq n$ (theorem 1). From this fact we obtain the Kollár's inequality for the Łojasiewicz exponent in the case of polynomial mappings f such that $m > n$. Moreover, we prove a Płoski's hypothesis on an estimation of the global degree of fibres of polynomial mappings.

Bronisławów, 12 – 16 stycznia, 1998 r.