**MATERIAŁY XXIV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2003 **Łódź** **str. 45**

TWIERDZENIE KOEBEGO O POKRYCIU A OSOBLIWOŚCI FUNKCJI HOLOMORFICZNYCH

Stanisław Spodzieja (Łódź)

Streszczenie. Opierając się na twierdzeniu Koebego o pokryciu, przedstawiamy dowody wzoru Kuo i Lu na wykładnik Łojasiewicza gradientu funkcji holomorficznej w zerze oraz wzoru Ha na wykładnik Łojasiewicza gradientu wielomianu w nieskończoności.

Wstęp

W pracy pokazujemy zastosowanie twierdzenia Koebego o pokryciu do badania wykładnika Łojasiewicza gradientu funkcji holomorficznej.

Profesor Zygmunt Charzyński stosował twierdzenie Koebego o pokryciu (patrz [10]) do lokalnego odwrócenia wielomianu (patrz [2], [3]). Metodą tą można udowodnić następującą wersję twierdzenia Smale'a (patrz [21], str. 33).

Lemat 1. *Niech $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem stopnia $d > 1$ oraz niech $\varphi_1, ..., \varphi_d \in \mathbb{C}$ i $\xi_1, ..., \xi_{d-1} \in \mathbb{C}$ będą wszystkimi pierwiastkami odpowiednio P i P'. Wówczas*

$$\frac{2^{d-2}}{3^d} \min_{i\neq j}(|\varphi_i - \varphi_j||P'(\varphi_i)|) \le \min_{1\le k\le d-1} |P(\xi_k)| \le 4 \min_{i\neq j}(|\varphi_i - \varphi_j||P'(\varphi_i)|).$$

Lemat ten znajduje się w pracy [8], lemat 3.2. Aby artykuł uczynić niezależnym przedstawimy dowód tego lematu w punkcie 1.

This research was partially supported by KBN Grant No. 2 P03A 007 18

W oparciu o lemat 1 i wersję twierdzenia Puiseux z parametrem (punkt 2) w punkcie 3 przedstawimy elementarny dowód twierdzenia Kuo i Lu (twierdzenie 5, patrz [13], twierdzenie A, porównaj [1], twierdzenie 2, [17], Appendix) wyrażającego wykładnik Łojasiewicza gradientu funkcji holomorficznej f w terminach zer f.

Lemat 1 odgrywa również kluczową rolę w dowodzie wzoru Ha (twierdzenie 13 i wniosek 16, por. [9] twierdzenia 1.4.3 i 1.4.1, patrz również [7], [8]), który jest przeniesieniem twierdzenia Kuo i Lu na przypadek wykładnika Łojasiewicza gradientu wielomianu w nieskończoności. Dowody te, przedstawiamy w punktach 4 i 5. Dowód twierdzenia 4 opiera się również na wersji twierdzenia Puiseux w nieskończoności. Omawiany lemat 1 daje prostą interpretację geometryczną punktu krytycznego w nieskończoności wielomianu podaną w punkcie 6 (własność 17 i twierdzenie 18).

1. Dowód lematu 1

Dla $a \in \mathbb{C}$ i $r > 0$ oznaczamy $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$.

Bez straty ogólności można założyć, że wielomianu P jest moniczny. Niech

$$R = \min_{1 \le k \le d-1} |P(\xi_k)|, \qquad r = \min_{i \neq j} |\varphi_i - \varphi_j||P'(\varphi_i)|.$$

Pomijając trywialne przypadki załóżmy, że $\varphi_i \neq \varphi_j$ dla $i \neq j$, czyli $R > 0$, $r > 0$.

Udowodnimy nierówność

$$\frac{2^{d-2}}{3^d} r \ \le\ R. \tag{1}$$

Dla $i \in \{1, ..., d\}$, niech $j_i \in \{1, ..., d\}$ będzie takie, że $|\varphi_i - \varphi_{j_i}| = \min_{i \neq j} |\varphi_i - \varphi_j|$. Oznaczając $r_i = \frac{1}{2}|\varphi_i - \varphi_{j_i}|$, $M_i = (\frac{3}{2})^{d-1} r_i |P'(\varphi_i)|$, $D_i = D(\varphi_i, r_i)$ dla $i = 1, ..., d$, mamy

$$|P(z)| = |z - \varphi_i| \prod_{j \neq i} |z - \varphi_j| \le \tfrac{1}{2}|\varphi_i - \varphi_{j_i}| \prod_{j \neq i} (\tfrac{3}{2}|\varphi_i - \varphi_j|) = M_i \quad \text{dla } z \in \overline{D_i}$$

oraz

$$\frac{2^{d-2}}{3^d} r \le \frac{2^{d-2}}{3^d} |\varphi_i - \varphi_{j_i}||P'(\varphi_i)| = \frac{r_i^2 |P'(\varphi_i)|^2}{6M_i} \qquad \text{dla } i = 1, ..., d.$$

Stąd i z twierdzenia 12.7 w [20], Ch. VII, dostajemy

$$D(0, \tfrac{2^{d-2}}{3^d} r) \subset D(0, \tfrac{r_i^2 |P'(\varphi_i)|^2}{6M_i}) \subset P(D_i), \qquad i = 1, ..., d.$$

Ponieważ $D_i \cap D_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, więc dla każdego $w \in D(0, \frac{2^{d-2}}{3^d} r)$ zachodzi $\# P^{-1}(w) = d$, zatem P nie ma wartości krytycznych w $D(0, \frac{2^{d-2}}{3^d} r)$. W konsekwencji $\frac{2^{d-2}}{3^d} r \le R$, czyli mamy (1).

Udowodnimy teraz

$$R \le 4r. \tag{2}$$

Niech $G = P^{-1}(D(0,R))$. Wówczas $P|_G : G \to D(0,R)$ jest nakryciem nierozgałęzionym d-krotnym. Zatem $G = G_1 \cup \ldots \cup G_d$, gdzie $G_1, ..., G_d$ są obszarami oraz $P|_{G_i} : G_i \to D(0,R)$ jest biholomorfizmem dla $i = 1, ..., d$. Oznaczmy $f_i = (P|_{G_i})^{-1} : D(0,R) \to G_i$. Wówczas, po ewentualnej zmianie kolejności funkcji f_i, można założyć, że $\varphi_i = f_i(0)$, $i = 1, ..., d$. Weźmy dowolne $i \in \{1, ..., d\}$ i połóżmy

$$g_i(w) = \tfrac{1}{Rf_i'(0)}[f_i(wR) - \varphi_i], \qquad w \in D(0,1).$$

g_i jest różnowartościową funkcją holomorficzną taką, że $g_i(0) = 0$ oraz $g_i'(0) = 1$. Zatem, z twierdzenia Koebego o pokryciu (patrz [10]), mamy $D(0, \frac{1}{4}) \subset g_i(D(0,1))$. W konsekwencji $D\left(0, \frac{R|f_i'(0)|}{4}\right) \subset Rf_i'(0)g_i(D(0,1)) = f_i(D(0,R)) - \varphi_i$, ([1]). Stąd,

$$D(\varphi_i, \tfrac{R|f_i'(0)|}{4}) \subset f_i(D(0,R)) = G_i, \qquad i = 1, ..., d.$$

Ponieważ $\varphi_j \notin G_i$ dla $i \neq j$ więc z powyższego, $\frac{R}{4|P'(\varphi_i)|} = \frac{R|f_i'(0)|}{4} \leq |\varphi_i - \varphi_j|$, $i \neq j$, co daje (2) i kończy dowód. □

2. Twierdzenie Puiseux z parametrem

Udowodnimy tutaj pewną wersję twierdzenia Puiseux (por. [16]).

Piszemy $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$ zamiast g jest funkcją holomorficzną w otoczeniu punktu $0 \in \mathbb{C}^n$. Jeśli dodatkowo $g(0) = 0$, to piszemy $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Zamiast pisać $|s|$ jest dostatecznie mały, piszemy $|s| \ll 1$. Dla $z = (x,y) \in \mathbb{C}^2$ przyjmujemy $|z| = \max(|x|, |y|)$.

Lemat 2. *Niech $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ będzie funkcją holomorficzną oraz niech $d = \operatorname{ord} f = \operatorname{ord} f(0,y)$, gdzie $1 < d < +\infty$ ([2]). Wówczas istnieją: dodatnia liczba całkowita N, nigdzie nie znikająca funkcja holomorficzna $\omega : (\mathbb{C}^3, 0) \to \mathbb{C}$, funkcje holomorficzne $\varphi_i : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ takie, że dla $|s| \ll 1$ zachodzi* $\operatorname{ord} \varphi_i(x,s) \geq N$, *$i = 1, ..., d$ ([3]), że w pewnym otoczeniu zera mamy*

$$f(t^N + sy, y) = \omega(t,s,y) \prod_{i=1}^{d} (y - \varphi_i(t,s)).$$

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że f ma w zerze kiełek nierozkładalny. Z założenia $d = \operatorname{ord} f = \operatorname{ord} f(0,y)$ dostajemy, że $\operatorname{ord} f(x + sy, y) = \operatorname{ord} f(sy, y) = d$ dla $|s| \ll 1$. Stosując twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa ([14], C.2.4), istnieje nigdzie nie znikająca funkcja $g : (\mathbb{C}^3, 0) \to \mathbb{C}$ oraz pseudowielomian wyróżniony

$$P(x,s,y) = y^d + a_1(x,s)y^{d-1} + \cdots + a_d(x,s),$$

[1] Jeśli $A \subset \mathbb{C}$ i $b \in \mathbb{C}$, to przyjmujemy $A - b = \{a - b : a \in A\}$ oraz $bA = \{ab : a \in A\}$.

[2] Jeśli $F = (f_1, ..., f_m) : G \to \mathbb{C}^m$ jest odwzorowaniem holomorficznym, gdzie $G \subset \mathbb{C}^2$ jest otoczeniem punktu $0 \in \mathbb{C}^2$, to *rzędem odwzorownia* F nazywamy $\operatorname{ord} F = \min_{1 \leq i \leq m} \operatorname{ord}_0 f_i$.

[3] Tutaj $\operatorname{ord} \varphi(x,s)$ oznacza rząd funkcji $x \mapsto \varphi(x,s)$ przy ustalonym s.

gdzie $a_i : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $\operatorname{ord} a_i = \operatorname{ord} a_i(x, s) \geq i$ dla $|s| \ll 1$ takie, że

$$f(x + sy, y) = g(x, s, y)P(x, s, y), \quad \text{w pewnym spójnym otoczeniu zera } U \times \Omega \times \Delta,$$

gdzie $U, \Omega, \Delta \subset \mathbb{C}$. Stąd, zmniejszając ewentualnie U i Ω, dostajemy że dla każdego $(x, s) \in U \times \Omega$, poza ewentualnie właściwym podzbiorem analitycznym $V \subset U \times \Omega$, funkcja $\Delta \ni y \mapsto f(x + sy, y)$ ma w Δ dokładnie d pierwiastków i wszystkie są jednokrotne.

Z twierdzenia Puiseux ([14], II.6.1) istnieje $\psi : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, że

$$\tau \mapsto (\tau^d, \psi(\tau)) \qquad \text{jest parametryzacją zbioru } f^{-1}(0) \text{ w otoczeniu zera.}$$

W konsekwencji oznaczając

$$Z = \{(x, s, y) \in U \times \Omega \times \Delta : f(x + sy, y) = 0\}$$

dostajemy, że

(3) $(\tau, s) \mapsto (\tau^d - s\psi(\tau), s, \psi(\tau))$ jest parametryzacją zbioru Z w otoczeniu zera.

Ponieważ $\operatorname{ord} a_i(x, 0) \geq i$, więc $\operatorname{ord} \psi \geq d$, zatem $\frac{\tau^d - s\psi(\tau)}{\tau^d} \neq 0$ dla $|(\tau, s)| \ll 1$. W konsekwencji, w pewnym otoczeniu zera, istnieje gałąź pierwiastka stopnia d funkcji $\tau^d - s\psi(\tau)$. Oznaczając tę gałąź przez κ mamy

$$\tau^d = (\kappa(\tau, s))^d + s\psi(\tau) \qquad \text{dla} \quad |(\tau, s)| \ll 1. \tag{4}$$

Wtedy $\operatorname{ord} \kappa = \operatorname{ord} \kappa(\tau, s) = 1$ dla $|s| \ll 1$, więc $(\tau, s) \mapsto (\kappa(\tau, s), s)$ jest biholomorfizmem otoczenia zera na pewne otoczenie zera. Niech $(t, s) \mapsto (\upsilon(t, s), s)$ będzie odwzorowaniem odwrotnym do powyższego. Wówczas z (4),

$$(\upsilon(t, s))^d = t^d + s\psi(\upsilon(t, s)) \qquad \text{dla} \quad |(t, s)| \ll 1,$$

zatem, oznaczając $\varphi = \psi \circ \upsilon$, z (3) mamy

$$\Phi : (t, s) \mapsto (t^d, s, \varphi(t, s)) \quad \text{jest parametryzacją zbioru } Z \text{ w otoczeniu zera.}$$

Oznaczmy przez ε pierwiastek pierwotny stopnia d z jedynki. Zauważmy, że

$$P(t^d, s, y) = \prod_{i=1}^{d} (y - \varphi(\varepsilon^i t, s)) \qquad \text{dla } |(t, s)| \ll 1 \text{ oraz } y \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Istotnie, dla $|(t, s)| \ll 1$ takich, że $(t^d, s) \notin V$ oraz $i, j \in \{1, ..., d\}$, $i \neq j$ mamy $\varphi(\varepsilon^i t, s) \neq \varphi(\varepsilon^j t, s)$, więc wielomiany zmiennej y w (5) mają te same zbiory pierwiastków. Ponieważ są to wielomiany moniczne, więc pokrywają się w zbiorze $\{(t, s, y) : |(t, s)| \ll 1,\ (t^d, s) \notin V\}$. Stąd i z twierdzenia o identyczności mamy (5). Przyjmując $\omega(t, s, y) = g(t^d, s, y)$, $\varphi_i(t, s) = \varphi(\varepsilon^i t, s)$, z (5) dostajemy tezę. $\square$

3. Wykładnik Łojasiewicza gradientu w zerze

Niech $G \subset \mathbb{C}^2$ będzie otwartym otoczeniem zera oraz $F : G \to \mathbb{C}^m$ — odwzorowaniem holomorficznym. Niech $X \subset G$ oraz niech 0 będzie punktem skupienia zbioru X. *Wykładnikiem Łojasiewicza w punkcie* 0 *odwzorowania* F *na zbiorze* X nazywamy

$$\mathcal{L}_0(F|X) = \inf\{\nu \in \mathbb{R} : \exists_{A,\, B>0}\ \forall_{z\in X}\ (|z| < B \Rightarrow A|z|^\nu \le |F(z)|)\}. \ (^4)$$

Jeśli $X = G$, to piszemy $\mathcal{L}_0(F)$ zamiast $\mathcal{L}_0(F|G)$ i nazywamy *wykładnikiem Łojasiewicza odwzorowania F w punkcie* 0.

Niech w dalszym ciągu tego punktu $f : G \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną zmiennych $z = (x, y)$ oraz niech $Z_y = \{z \in G : \frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0\}$.

Niech $\operatorname{ord} f(0, y) = d$, $1 < d < +\infty$. Wówczas (^{5}), istnieje dodatnie liczba całkowita N, że w pewnym otoczeniu zera,

$$f(t^N, y) = \alpha(t^N, y)\prod_{i=1}^{d}(y - \varphi_i(t)), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(t^N, y) = \beta(t^N, y)\prod_{k=1}^{d-1}(y - \xi_k(t)).$$

gdzie $\alpha, \beta : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}$, $\operatorname{ord}\alpha = \operatorname{ord}\beta = 0$ oraz $\varphi_i, \xi_k : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $\operatorname{ord}\varphi_i \ge N$, $\operatorname{ord}\xi_k \ge N$, $i = 1, ..., d$, $k = 1, ..., d-1$. Określmy

$$l_y^o(f) = \frac{1}{N}\max_{i\ne j}\,[\operatorname{ord}(\varphi_i(t) - \varphi_j(t)) + \operatorname{ord}\frac{\partial f}{\partial y}(t^N, \varphi_i(t))].$$

Piszemy również $l_y^o(f(x, y))$.

Wobec lematu 1 mamy

$$l_y^o(f) = \frac{1}{N}\max_{1\le k\le d-1}\operatorname{ord} f(t^N, \xi_k(t)).$$

Stąd dostajemy łatwo związek wykładnika Łojasiewicza gradientu $\operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ funkcji f na zerach pochodnej cząstkowej ze stałą $l_y^o(f)$.

Własność 3. *Niech* $1 < \operatorname{ord} f = \operatorname{ord} f(0, y) < +\infty$. *Wówczas* $\mathcal{L}_0(f|Z_y) = l_y^o(f)$ *oraz* $\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f|Z_y) = l_y^o(f) - 1$. *W szczególności* $\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f) \ge l_y^o(f) - 1$.

Własność 4. *Niech* $X_s = \{z \in G : s\frac{\partial f}{\partial x}(z) + \frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0\}$, $s \in \mathbb{C}$. *Wówczas*

(6) $\quad \mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f) = \mathcal{L}_0(\frac{\partial f}{\partial x}|X_s)$ *dla każdego $s \in \mathbb{C}$ oprócz co najwyżej jednego.*

Dowód. Istotnie, z twierdzenia 1 w [5] wynika, że

$$\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f) = \max\{\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f|X_{s_1}),\, \mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f|X_{s_2})\} \qquad \text{dla wszystkich } s_1 \ne s_2.$$

Zatem $\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f) = \mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f|X_s)$ dla każdego $s \in \mathbb{C}$ oprócz co najwyżej jednego. Ponieważ $\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f|X_s) = \mathcal{L}_0((\frac{\partial f}{\partial x}, s\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y})|X_s) = \mathcal{L}_0(\frac{\partial f}{\partial x}|X_s)$, więc mamy (6).$\square$

Stosując własności 3, 4 i lemat 2 udowodnimy poniższe twierdzenie Kuo i Lu wiążące wykładnik Łojasiewicza gradientu f ze stałą $l_\infty^o(f)$.

---

[4] Przyjmujemy $\inf\emptyset = +\infty$.

[5] W myśl twierdzenia przygotowawczego Weierstrassa ([14], C.2.4) oraz twierdzenia Puiseux ([14], II.6.1).

Twierdzenie 5. *Jeśli* $1 < \operatorname{ord} f = \operatorname{ord} f(0,y) < +\infty$, *to* $\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f) = l_y^o(f) - 1$.

Dowód. Dla $s \in \mathbb{C}$ oznaczmy $L_s(x,y) = (x+sy, y)$, $G_s = L_s^{-1}(G)$, $g_s = f \circ (L_s|_{G_s})$ oraz $W_s = \{z \in G_s : \frac{\partial g_s}{\partial y}(z) = 0\}$, $X_s = L_s(W_s)$. Wtedy $X_s = \{z \in G : s\frac{\partial f}{\partial x}(z) + \frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0\}$. Z lematu 2 i własności rzędu funkcji dostajemy łatwo

$$l_y^o(g_s) = l_y^o(f(x+sy, y)) \le l_y^o(f(x,y)) \qquad \text{dla} \quad |s| \ll 1. \tag{7}$$

Ponieważ $\frac{\partial g_s}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \circ L_s$ i $\frac{\partial g_s}{\partial y} = (s\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}) \circ L_s$, więc z (7) i własności 3 mamy

$$\mathcal{L}_0(\tfrac{\partial g_s}{\partial x}|W_s) = l_y^o(g_s) - 1 \le l_y^o(f) - 1 \le \mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f) \quad \text{dla } |s| \ll 1 \tag{8}$$

oraz $\mathcal{L}_0(\frac{\partial g_s}{\partial x}|W_s) = \mathcal{L}_0(\frac{\partial f}{\partial x} \circ L_s|W_s) = \mathcal{L}_0(\frac{\partial f}{\partial x}|X_s)$ dla $|s| \ll 1$. Stąd i z własności 4,

$$\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f) = \mathcal{L}_0(\tfrac{\partial g_s}{\partial x}|W_s) \qquad \text{dla } |s| \ll 1,$$

więc (8) daje tezę. □

Z twierdzenia 5 i własności 3 dostajemy (por. [1], twierdzenie 1).

Wniosek 6. *Jeśli* $1 < \operatorname{ord} f = \operatorname{ord} f(0,y) < +\infty$, *to*
$$\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f) = \mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f|Z_y) = \mathcal{L}_0(f|Z_y) - 1.$$

Uwaga 7. *Z twierdzenia 5 dostajemy natychmiast, że* $l_y^o(f)$ *nie zależy od wyboru układu współrzędnych takiego, że* $\operatorname{ord} f = \operatorname{ord} f(0,y)$. *Jeśli dodatkowo zachodzi* $1 < \operatorname{ord} f(x,0) = \operatorname{ord} f(0,y) < \infty$, *to z twierdzenia 5 i własności 3,*

$$\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f) = \mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f|Z_x) = \mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f|Z_y),$$

gdzie $Z_x = \{z \in G : \frac{\partial f}{\partial x}(z) = 0\}$. *W konsekwencji*

$$l_y^o(f(x,y)) = l_y^o(f(y,x)).$$

Uwaga 8. *Niech* $1 < \operatorname{ord} f(x,0) = \operatorname{ord} f(0,y) < \infty$. *Dla każdej funkcji* $g : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *takiej, że* $\operatorname{ord}(f-g) > l_y^o(f)$ *zachodzi* $\operatorname{ord} g = \operatorname{ord} g(0,y) = d$ *oraz* $l_y^o(g) = l_y^o(f)$.

Istotnie (por. [18]), ponieważ $l_y^o(f) \ge \operatorname{ord} f$, więc założenie $\operatorname{ord}(f-g) > l_y^o(f)$ implikuje $\operatorname{ord} g = \operatorname{ord} g(0,y) = d$. Oznaczmy $\alpha = l_y^o(f) - 1$, $\beta = \operatorname{ord}(f-g) - 1$. Wtedy istnieje $C' > 0$, że $|\operatorname{grad}(f-g)(z)| \le C'|z|^\beta$ dla $|z| \ll 1$. Z twierdzenia 5 mamy $\alpha = \mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f)$, więc istnieje $C > 0$, że $|\operatorname{grad} f(z)| \ge C|z|^\alpha$ dla $|z| \ll 1$. Zatem dla $|z| \ll 1$,

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad} g(z)| &= |\operatorname{grad} f(z) - \operatorname{grad}(f-g)(z)| \ge |\operatorname{grad} f(z)| - |\operatorname{grad}(f-g)(z)| \\ &\ge C|z|^\alpha - C'|z|^\beta = (C - C'|z|^{\beta-\alpha})|z|^\alpha \ge \tfrac{1}{2}C|z|^\alpha. \end{aligned}$$

Stąd, $\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} g) \le \mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f)$. Przez symetrię warunków mamy $\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f) \le \mathcal{L}_0(\operatorname{grad} g)$. To daje $\mathcal{L}_0(\operatorname{grad} f) = \mathcal{L}_0(\operatorname{grad} g)$ i wobec twierdzenia 5 daje tezę.

4. Wykładnik Łojasiewicza gradientu wielomianu w nieskończoności

W punkcie tym przedstawimy dowód wzoru Ha (patrz [9], twierdzenie 1.4.3, por. [7]) na wykładnik Łojasiewicza gradientu wielomianu w nieskończoności (por. twierdzenie 5).

Niech $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym oraz $X \subset \mathbb{C}^2$ będzie zbiorem nieograniczonym. *Wykładnikiem Łojasiewicza w nieskończoności odwzorowania F na zbiorze X* nazywamy

$$\mathcal{L}_\infty(F|X) = \sup\{\nu \in \mathbb{R} : \exists_{A,B>0} \forall_{z \in X} \, (|z| \geq B \Rightarrow A|z|^\nu \leq |F(z)|)\}.$$

Jeśli $X = \mathbb{C}^2$, to piszemy $\mathcal{L}_\infty(F)$ zamiast $\mathcal{L}_\infty(F|\mathbb{C}^2)$ i nazywamy *wykładnikiem Łojasiewicza w nieskończoności odwzorowania F*.

Przez *sąsiedztwo nieskończoności* w $\mathbb{C}^m$ rozumiemy dopełnienie zbioru zwartego w $\mathbb{C}^m$. Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie sąsiedztwem nieskończoności. Odwzorowanie $h : U \to \mathbb{C}^m$ nazywamy *meromorficznym w nieskończoności*, gdy h jest sumą szeregu Laurenta postaci

$$h(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p-1} x^{p-1} + \cdots, \qquad x \in U, \quad \alpha_i \in \mathbb{C}^m, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Jeśli $m = 1$, to h nazywamy *funkcją meromorficzną w nieskończoności.* Jeśli $h \neq 0$, to można założyć, że $\alpha_p \neq 0$. Liczbę p nazywamy *stopniem* h i oznaczamy $\deg h$. Dla $h = 0$, przyjmujemy $\deg h = -\infty$.

Niech w dalszym ciągu pracy, $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem zmiennych $z = (x, y)$, $d = \deg f = \deg_y f > 1$ oraz niech $Z_y = \{z \in \mathbb{C}^2 : \frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0\}$.

W myśl lematu 4.2 w [6], istnieją: $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dodatnie liczba całkowita N, sąsiedztwo nieskończoności $U \subset \mathbb{C}$, funkcje meromorficzne w nieskończoności φ_i, $\xi_k : U \to \mathbb{C}$, $\deg \varphi_i \leq N$, $\deg \xi_k \leq N$, $i = 1, ..., d$, $k = 1, ..., d-1$ takie, że dla $(t, y) \in U \times \mathbb{C}$,

$$f(t^N, y) = a \prod_{i=1}^d (y - \varphi_i(t)), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(t^N, y) = ad \prod_{k=1}^{d-1} (y - \xi_k(t)). \tag{9}$$

Przy powyższych oznaczeniach określamy

$$l_y^\infty(f) = \frac{1}{N} \min_{i \neq j} \left[\deg(\varphi_i(t) - \varphi_j(t)) + \deg \frac{\partial f}{\partial y}(t^N, \varphi_i(t))\right].$$

Piszemy również $l_y^\infty(f(x, y))$.

Wobec (9), z lematu 1 mamy

$$l_y^\infty(f) = \frac{1}{N} \min_{1 \leq k \leq d-1} \deg f(t^N, \xi_k(t)). \tag{10}$$

Stąd dostajemy łatwo

Własność 9. *$\mathcal{L}_\infty(f|Z_y) = l_y^\infty(f)$ oraz $\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f|Z_y) \leq l_y^\infty(f) - 1$. W szczególności $\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f) \leq l_y^\infty(f) - 1$.*

Określmy

$$\Lambda_\infty(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists_{(z_n) \subset Z_y} \, z_n \to \infty \ \wedge \ f(z_n) \to \lambda\}.$$

Z (10) dostajemy natychmiast

Wniosek 10. *$l_y^\infty(f-\lambda)<0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda \in \Lambda_\infty(f)$.*

Z twierdzenia 1 w [4] dostajemy odpowiednik własności 4 w nieskończoności.

Własność 11. *Niech $X_s = \{z \in \mathbb{C}^2 : s\frac{\partial f}{\partial x}(z) + \frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0\}$, $s \in \mathbb{C}$. Wówczas*

$$\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f) = \mathcal{L}_\infty(\tfrac{\partial f}{\partial x}|X_s) \quad \textit{dla każdego } s \in \mathbb{C} \textit{ oprócz co najwyżej jednego.}$$

Zachodzi analogiczna do lematu 2, wersja twierdzenia Puiseux w nieskończoności (por. propozycja 9.1 w [12] i lemat 2 w [11]). Nie zamieszczamy tutaj dowodu tej wersji, gdyż przebiega on podobnie do dowodu lematu 2.

Lemat 12. *Istnieją: dodatnia liczba całkowita N, sąsiedztwo nieskończoności $U \subset \mathbb{C}$, otoczenie zera $\Omega \subset \mathbb{C}$, wielomian $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\alpha(0) \neq 0$, funkcje holomorficzne $\varphi_i : U \times \Omega \to \mathbb{C}$ takie, że dla $s \in \Omega$ funkcje $U \ni t \mapsto \varphi_i(t,s) \in \mathbb{C}$ są meromorficzne w nieskończoności stopni co najwyżej N, $i = 1, ..., d$ oraz*

$$f(t^N + sy, y) = \alpha(s) \prod_{i=1}^d (y - \varphi_i(t,s)) \qquad \textit{dla} \quad (t,y,s) \in U \times \mathbb{C} \times \Omega.$$

Udowodnimy teraz zapowiadaną wersję wzoru Ha.

Twierdzenie 13. (i) *Jeśli $\Lambda_\infty(f) = \emptyset$, to $\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f) = l_y^\infty(f) - 1$.*
(ii) *Jeśli $\Lambda_\infty(f) \neq \emptyset$, to $\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f) = \min_{\lambda \in \Lambda_\infty(f)} l_y^\infty(f-\lambda) - 1$.*

Dowód. Dla każdego $s \in \mathbb{C}$ oznaczmy $L_s(x,y) = (x+sy, y)$, $g_s = f \circ L_s$ oraz $W_s = \{z \in \mathbb{C}^2 : \frac{\partial g_s}{\partial y}(z) = 0\}$, $X_s = \{z \in \mathbb{C}^2 : s\frac{\partial f}{\partial x}(z) + \frac{\partial f}{\partial y}(z) = 0\}$.

Oczywiście $\mathcal{L}_\infty(\frac{\partial f}{\partial x}|X_s) = \mathcal{L}_\infty(\frac{\partial g_s}{\partial x}|W_s)$ dla $s \in \mathbb{C}$. Z drugiej strony, z lematu 12 i własności stopnia funkcji mamy

$$l_y^\infty(f) \leq l_y^\infty(f(x+sy,y)) = l_y^\infty(g_s) \qquad \text{dla} \quad |s| \ll 1. \tag{11}$$

Zatem z własności 9 oraz 11 dla $0 < |s| \ll 1$ mamy

$$\mathcal{L}_\infty(\tfrac{\partial g_s}{\partial x}|W_s) = \mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f) \leq l_y^\infty(f) - 1 \leq \mathcal{L}_\infty(g_s|W_s) - 1. \tag{12}$$

Ad. (i) Z założenia $\Lambda_\infty(f) = \emptyset$, własności 9 i wniosku 10 wynika $l_y^\infty(f) > 0$. Stąd i z (12) mamy $\mathcal{L}_\infty(g_s|W_s) > 0$, więc łatwo sprawdzamy, że $\mathcal{L}_\infty(\frac{\partial g_s}{\partial x}|W_s) = \mathcal{L}_\infty(g_s|W_s) - 1$. W konsekwencji (12) implikuje (i).

Pokazaliśmy, że jeśli $\Lambda_\infty(f) = \emptyset$, to $l_y^\infty(f) > 0$. Z (12) widzimy, że warunek $l_y^\infty(f) > 0$, wobec własności 9 i wniosku 10 daje, że $\Lambda_\infty(f) = \emptyset$. Mamy więc:

$$l_y^\infty(f) > 0 \iff \Lambda_\infty(f) = \emptyset. \tag{13}$$

Ad. (ii) Wobec (12) istnieje $0 < |s| \ll 1$, że $\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f) = \mathcal{L}_\infty(\frac{\partial g_s}{\partial x}|W_s)$. Ponadto z założenia $\Lambda_\infty(f) \neq \emptyset$ i (13) mamy $\mathcal{L}_\infty(\frac{\partial g_s}{\partial x}|W_s) \leq -1$. Niech $U \subset \mathbb{C}$ będzie sąsiedztwem nieskończoności oraz $\psi = (t^N, \psi_2(t)) : U \to W_s$ będzie odwzorowaniem meromorficznym w nieskończoności takim, że $\deg \psi = N > 0$ oraz

$$\tfrac{1}{N} \deg \tfrac{\partial g_s}{\partial x} \circ \psi = \mathcal{L}_\infty(\tfrac{\partial g_s}{\partial x}|W_s) \leq -1 \quad (^6). \tag{14}$$

[6] Ponieważ $\deg g_s = \deg_y g_s$ dla $|s| \ll 1$, więc podobnie jak w (9) pokazujemy, że takie odwzorowanie ψ istnieje.

W szczególności $\deg g_s \circ \psi \leq 0$. Oznaczmy $\lambda = \lim_{t\to\infty} g_s(\psi(t))$. Oczywiście $\lambda \in \mathbb{C}$. Bez zmnniejszenia ogólności rozważań można założyć, że $\lambda = 0$. Wówczas $\deg g_s \circ \psi < 0$, czyli $l_y^\infty(g_s) < 0$. Stąd, z wniosku 10 i (11) mamy $0 \in \Lambda_\infty(f)$. Wtedy

$$\mathcal{L}_\infty(g_s|W_s) - 1 \leq \tfrac{\deg g_s\circ\psi}{N} - 1 = \tfrac{1}{N}\deg \tfrac{\partial g_s}{\partial x}\circ\psi.$$

To, wraz z (14) i (12) daje $\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f) = l_y^\infty(f) - 1$. W konsekwencji

$$\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f) \geq \min\nolimits_{\lambda\in\Lambda_\infty(f)} l_y^\infty(f-\lambda) - 1.$$

Ponieważ z (12) wynika nierówność przeciwna do powyższej, więc mamy (ii). $\square$.

5. Wykładnik Łojasiewicza gradientu w otoczeniu poziomicy

W tym punkcie udowodnimy wzór Ha ([9], twierdzenie 1.4.1), na wykładnik Łojasiewicza gradientu wielomianu w otoczeniu poziomicy.

Mamy następujące (por. [7], twierdzenie 3.3 oraz [8], uwaga 3.7).

Twierdzenie 14. *Jeśli* $0 \in \Lambda_\infty(f)$, *to*

$$\mathcal{L}_\infty(f, \tfrac{\partial f}{\partial y}) = \mathcal{L}_\infty(f, \operatorname{grad} f) = \mathcal{L}_\infty((f, \operatorname{grad} f)|Z_y) = l_y^\infty(f).$$

Dowód. Zauważmy, że

$$\mathcal{L}_\infty((f, \operatorname{grad} f)|Z_y) \leq l_y^\infty(f). \tag{15}$$

Istotnie dla $1 \leq k \leq d-1$ mamy $\deg \frac{\partial f}{\partial x}(t^N, \xi_k(t)) \leq \deg f(t^N, \xi_k(t))$, gdyż

$$\deg \tfrac{\partial f}{\partial x}(t^N, \xi_k(t)) + N - 1 = \deg(f(t^N, \xi_k(t))' \leq \deg f(t^N, \xi_k(t)) - 1, \tag{16}$$

więc, wobec własności 9 dostajemy (15).

Pokażemy, że

$$l_y^\infty(f) \leq \mathcal{L}_\infty(f, \tfrac{\partial f}{\partial y}). \tag{17}$$

Istotnie, oznaczmy $Z = \{z \in \mathbb{C}^2 : f(z) = 0\}$. Z twierdzenia 1 w [4] mamy

$$\mathcal{L}_\infty(f, \tfrac{\partial f}{\partial y}) = \min\{\mathcal{L}_\infty(f|Z_y), \mathcal{L}_\infty(\tfrac{\partial f}{\partial y}|Z)\}.$$

Jeśli $\mathcal{L}_\infty(f, \frac{\partial f}{\partial y}) = \mathcal{L}_\infty(f|Z_y)$, to z własności 9 mamy (17). Załóżmy, że $\mathcal{L}_\infty(f, \frac{\partial f}{\partial y}) = \mathcal{L}_\infty(\frac{\partial f}{\partial y}|Z)$. Ponieważ $0 \in \Lambda_\infty(f)$, więc z wniosku 10 mamy $l_y^\infty(f) < 0$. Zatem

$$\mathcal{L}_\infty(\tfrac{\partial f}{\partial y}|Z) = \tfrac{1}{N}\min\nolimits_{1\leq i\leq d} \deg \tfrac{\partial f}{\partial y}(t^N, \varphi_i(t)) < l_y^\infty(f).$$

W konsekwencji mamy (17).

Reasumując, (15), (17) i oczywisty ciąg nierówności

$$\mathcal{L}_\infty(f, \tfrac{\partial f}{\partial y}) \leq \mathcal{L}_\infty(f, \operatorname{grad} f) \leq \mathcal{L}_\infty((f, \operatorname{grad} f)|Z_y),$$

daje tezę. $\square$

Stosując lemat o wyborze krzywej ([15], lemat 3.1) dostajemy następującą nierówność Łojasiewicza z gradientem (patrz [8], twierdzenie 2.1).

Twierdzenie 15 (Nierówność Łojasiewicza). *Istnieją $C, \eta > 0$, że*

$$|f(z)| < \eta \ \Rightarrow |z||\operatorname{grad} f(z)| \geq C|f(z)|.$$

Stosując twierdzenia 14 i 15 udowodnimy zapowiedziany wzór Ha na wykładnik Łojasiewicza gradientu wielomianu w otoczeniu poziomicy.

Wniosek 16. *Jeśli* $0 \in \Lambda_\infty(f)$*, to dla dostatecznie małego otoczenia zera* $\varDelta \subset \mathbb{C}$*,*

$$\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f|f^{-1}(\varDelta)) = l_y^\infty(f) - 1.$$

Dowód. Z twierdzenia 14 i 15, dla dowolnego otoczenia zera $\varDelta \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \eta\}$,

$$\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f|f^{-1}(\varDelta)) \geq \mathcal{L}_\infty(f, \operatorname{grad} f) - 1 = l_y^\infty(f) - 1. \tag{18}$$

Ponieważ $0 \in \Lambda_\infty(f)$, więc z wniosku 10 mamy $l_y^\infty(f) < 0$. Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 14, z (16) i własności 9 wynika, że istnieje $1 \leq i \leq d-1$, że

$$\tfrac{1}{N} \deg \tfrac{\partial f}{\partial x}(t^N, \xi_i(t)) \leq \min_{1 \leq k \leq d-1} \tfrac{1}{N} \deg f(t^N, \xi_k(t)) - 1 = l_y^\infty(f) - 1.$$

Stąd i z twierdzenia 15, $\deg f(t^N, \xi_i(t)) < 0$, więc $(t^N, \xi_i(t)) \in f^{-1}(\varDelta)$ dla $|t| \gg 1$. W konsekwencji, $\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f|f^{-1}(\varDelta)) \leq l_y^\infty(f) - 1$, co wraz z (18) daje tezę. □

6. Punkty bifurkacyjne wielomianu

Niech $C, \delta > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz niech

$$\begin{aligned} X_{\alpha,C,\delta} &= \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| > \delta,\ |f(x,y)| < C|x|^\alpha\}, \\ Y_{\alpha,C,\delta} &= \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 : |u| > \delta,\ |v| < C|u|^\alpha\}, \\ F_{\alpha,C,\delta} &: X_{\alpha,C,\delta} \ni (x,y) \mapsto (x, f(x,y)) \in Y_{\alpha,C,\delta}. \end{aligned}$$

Własność 17. $l_y^\infty(f)$ *jest największą liczbą* α *dla której istnieją* $C, \delta > 0$*, że* $F_{\alpha,C,\delta}$ *jest nakryciem nierozgałęzionym. Wtedy jest to nakrycie* $\deg f$*-krotne.*

Dowód. $F_{\delta,C,\alpha}$ jest nakryciem wtedy i tylko wtedy, gdy $Z_y \cap X_{\alpha,C,\delta} = \emptyset$. Z drugiej strony dla $\alpha = l_y^\infty(f)$, w myśl własności 9, istnieją $C, \delta > 0$ takie, że

$$|f(x,y)| \geq C|x|^\alpha \qquad \text{dla} \quad (x,y) \in Z_y, \quad |x| > \delta, \ (^7)$$

W szczególności $Z_y \cap X_{l_y^\infty(f),C,\delta} = \emptyset$. Ponadto $l_y^\alpha(f)$ jest największą liczbą spełniającą powyższe. To daje tezę. □

Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ jest *punktem typowym w nieskończoności wielomianu* f, gdy istnieje otoczenie $\varDelta \subset \mathbb{C}$ punktu λ oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{C}^2$ taki, że

$$f|_{f^{-1}(\varDelta) \setminus K} : f^{-1}(\varDelta) \setminus K \to \varDelta \qquad \text{jest trywialną wiązką klasy } C^\infty.$$

W przeciwnym razie λ nazywamy *punktem bifurkacyjnym w nieskończoności wielomianu* f. Zbiór tych punktów bifurkacyjnych oznaczamy $B_\infty(f)$.

[7] gdyż łatwo pokazujemy, że istnieje $A > 0$, że dla $(x,y) \in Z_y$ takich, że $|(x,y)| \gg 1$ zachodzi $|x| \leq |(x,y)| \leq A|x|$, gdzie $|(x,y)| \gg 1$ oznacza "dla dostatecznie dużych $|(x,y)|$".

Twierdzenie 18. (i) *Jeśli* $l_y^\infty(f) > 0$, *to* $B_\infty(f) = \emptyset$.
(ii) *Jeśli* $l_y^\infty(f) = 0$, *to* $B_\infty(f) \neq \emptyset$ *lecz* $0 \notin B_\infty(f)$.
(iii) *Jeśli* $l_y^\infty(f) < 0$, *to* $0 \in B_\infty(f)$.

Dowód. Niech $\alpha = l_y^\infty(f)$ oraz w myśl własnści 17, $C, \delta > 0$ będą takie, że $F_{\alpha,C,\delta}$ jest nakryciem nierozgałęzionym. Załóżmy, że $l_y^\infty(f) \geq 0$. Wówczas istnieje otoczenie zera $\Delta \subset \mathbb{C}$, że

$$\{(u,v) \in \mathbb{C}^2 : |u| > \delta, \quad v \in \Delta\} \subset Y_{\alpha,C,\delta}.$$

Zatem, oznaczając $K = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : |x| \leq \delta, \quad f(x,y) \in \overline{\Delta}\}$, dostajemy łatwo, że K jest zbiorem zwartym oraz, że $f|_{f^{-1}(\Delta)\setminus K} : f^{-1}(\Delta) \setminus K \to \Delta$ jest trywialną wiązką klasy C^∞. W konsekwencji $0 \notin B_\infty(f)$.

Ad. (i) Ponieważ $l_y^\infty(f) > 0$, więc ze wzoru (10) dostajemy, że dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$ zachodzi $l_y^\infty(f - \lambda) > 0$. Zatem z powyższego, $\lambda \notin B_\infty(f)$ dla każdego $\lambda \in \mathbb{C}$, czyli mamy (i).

Ad. (iii). Przypuśćmy przeciwnie, że $l_y^\infty(f) < 0$ oraz, że $0 \notin B_\infty(f)$. Weźmy dowolne otoczenie zera $\Delta \subset \mathbb{C}$. Wobec (10), istnieje ξ_k, $1 \leq k \leq d-1$, że $\deg f(t^N, \xi_k(t)) < 0$. W szczególności $(t^N, \xi_k(t)) \in f^{-1}(\Delta)$ dla $|t| \gg 1$. Ponadto,

$$\tfrac{1}{N} \deg \operatorname{grad} f(t^N, \xi_k(t)) = \tfrac{1}{N} \deg \tfrac{\partial f}{\partial x}(t^N, \xi_k(t)) < -1.$$

Reasumując $\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f|f^{-1}(\Delta)) < -1$. Z drugiej strony, z twierdzenia Ha ([9], twierdzenie 1.3.2) mamy, że istnieje otoczenie zera $\tilde{\Delta} \subset \mathbb{C}$, że $\mathcal{L}_\infty(\operatorname{grad} f|f^{-1}(\tilde{\Delta})) \geq -1$. Otrzymana sprzeczność daje (iii).

Ad. (ii) Z pierwszej części dowodu mamy $0 \notin B_\infty(f)$. Ponieważ $l_y^\infty(f) = 0$, więc wobec (10) istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$ takie, że $l_y^\infty(f - \lambda) < 0$. Zatem z (iii) wynika, że $\lambda \in B_\infty(f)$. To daje (ii) i kończy dowód. □

Z twierdzenia 18 i wniosku 10 dostajemy natychmiast

Wniosek 19. $B_\infty(f) = \Lambda_\infty(f)$.

Spis literatury

[1] M. Bogusławska, *Wykładnik Łojasiewicza gradientu funkcji holomorficznej*, Uniwersity of Łódź, Faculty of Mathematics (Doctoral Thesis) (2001).

[2] Z. Charzyński, *Fonctions univalentes inverses Polynomes univalentes*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź **IX** (1958), 1-21.

[3] Z. Charzyński, A. Kozłowski, *Geometry of polynomials (II)*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź **XXVIII** (1978), 1-10.

[4] J. Chądzyński, T. Krasiński, *A set on which the Łojasiewicz exponent at infinity is attained*, Ann. Polon. Math. **67** (1997), 191-197.

[5] J. Chądzyński, T. Krasiński, *A set on which the local Łojasiewicz exponent is attained*, Ann. Polon. Math. **67** (1997), 297-301.

[6] J. Chądzyński, T. Krasiński, *Exponent of growth of polynomial mappings of* $\mathbb{C}^2$ *into* $\mathbb{C}^2$, in: Singularities, S. Łojasiewicz (ed.), Banach Center Publications 20, PWN, Warszawa, 1988, 147-160.

[7] J. Chądzyński, T. Krasiński, *The gradient of a polynomial at infinity*, Faculty of Mathematics University of Lodz, Preprint (\http://www.math.uni.lodz.pl/preprints) (2002).

[8] J. Gwoździewicz, S. Spodzieja, *Lojasiewicz gradient inequality in a neighbourhood of the fibre*, Faculty of Mathematics University of Lodz, Preprint (\http://www.math.uni.lodz.pl/preprints) (2002).

[9] H. V. Ha, *Nombres de Łojasiewicz et singularités à l'infini des polynômes de deux variables complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), 429-432.

[10] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Göttinger Nachr. (1907), 198-207; (1909), 68-76.

[11] T. Krasiński, *On branches at infinity of a pencil of polynomials in two complex variables*, Ann. Polon. Math. **55** (1991), 213-220.

[12] T. Krasiński, *Poziomice wielomianów dwóch zmiennych a hipoteza jakobianowa*, Wyd. UŁ, Łódź, 1991 (in Polish).

[13] T. C. Kuo, Y. C. Lu, *On analytic function germs of two complex variables*, Topology **16** (1977), 299-310.

[14] S. Łojasiewicz, *Introduction to complex analytic geometry*, Birkhäuser, Basel -Boston-Berlin, 1991.

[15] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, vol. 61, Ann. of Math. Stud, 1968.

[16] W. Pawłucki, *Le théorème de Puiseux pour une application sous-analytique*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **32** (1984), 555-560.

[17] A. Płoski, *On the maximal polar quotient of an analytic plane curve*, Kodai Math. J. 24 (2001), 120–133..

[18] A. Płoski, *Sur l'exposant d'une application analytique II*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 33 (1985), 123-127.

[19] T. Rodak, *The Łojasiewicz exponent of the gradient in the ring of formal power series*, Faculty of Mathematics University of Lodz, Preprint (\http://www.math.uni.lodz.pl/preprints) (2002).

[20] S. Saks, A. Zygmund, *Analytic functions*, PWN, Warszawa, 1965.

[21] S. Smale, *The fundamental theorem of algebra and complexity theory*, Bull. Amer. Math. Soc. **4** (1981), 1-36.

The Koebe covering theorem and singularities of holomorphic functions

Summary. We use the Koebe covering theorem to prove the Kuo and Lu formula of the Łojasiewicz gradient exponent of a holomorphic function at zero and the Ha formula of Łojasiewicz gradient exponent at infinity of a polynomial.

Łódź, 6 – 10 stycznia 2003 r.