MATERIAŁY XXVI KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2005 **Łódź** **str. 39**

O AUTOMORFIŹMIE NAGATY

Stanisław Spodzieja (Łódź)

Wstęp

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z jedynką oraz niech $R[x_1, ..., x_n]$ będzie pierścieniem wielomianów nad R zmiennych $x_1, ..., x_n$. Automorfizm φ pierścienia $R[x_1, ..., x_n]$ postaci

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x_j) & = & x_j & \text{dla} \quad j \neq i \\ \varphi(x_j) & = & x_i + f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) & \text{dla} \quad j = i, \end{array}$$

gdzie $i \in \{1, ..., n\}$ oraz $f \in R[x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n]$, nazywamy *elementarnym.* Automorfizm ψ pierścienia $R[x_1, ..., x_n]$ nazywamy *liniowym*, gdy

$$[\psi(x_1), \dots, \psi(x_n)] = [x_1, \dots, x_n]A$$

dla pewnej macierzy odwracalnej $A \in GL(n, R)$, gdzie prawą stronę rozumiemy jako iloczyn macierzy.

Masayoshi Nagata w 1972 r. w pracy [2], (1.1), Part 2, podał następujący przykład automorfizmu σ pierścienia $R[x, y, z]$:

$$\begin{array}{rcl} \sigma(x) & = & x - 2y(xz + y^2) - z(xz + y^2)^2 \\ \sigma(y) & = & y + z(xz + y^2) \\ \sigma(z) & = & z \end{array}$$

i pokazał, że σ, traktowany jako automorfizm pierścienia $D[x, y]$, gdzie $D = R[z]$, nie jest złożeniem skończonej ilości automorfizmów liniowych i elementarnych pierścienia $D[x, y]$ ([2], Theorem 1.4, Part 2). Jednocześnie postawił on hipotezę, że automorfizm ten nie jest również złożeniem skończonej ilości automorfizmów liniowych i elementarnych pierścienia $k[x, y, z]$ ([2], Conjecture 3.1, Part 2). Hipotezę tę potwierdzili Shestakov i Umirbaev w [3], Corollary 9. M. Smith w [4] (patrz również [1], Corollary 6.1.5) pokazała, że jeśli rozszerzymy automorfizm σ do $R[x, y, z, w]$, kładąc $\sigma(w) = w$, to tak określony automorfizm jest złożeniem skończonej ilości automorfizmów liniowych i elementarnych. W dowodzie tego faktu autorka wykorzystała przedstawienie exponencjalne automorfizmu σ, tym samym rozważyła ona tylko przypadek pierścieni charakterystyki zero. W pracy udowodnimy, że twierdzenie M. Smith jest prawdziwe dla pierścienia R dowolnej charakterystyki (twierdzenie 1).

Rozkład automorfizmu Nagaty

Twierdzenie 1. *Niech R będzie pierścieniem dowolnej charakterystyki. Wówczas automorfizm $\overline{\sigma}$ pierścienia $R[x, y, z, w]$ określony wzorem $\overline{\sigma}(x) = \sigma(x)$, $\overline{\sigma}(y) = \sigma(y)$, $\overline{\sigma}(z) = \sigma(z)$, $\overline{\sigma}(w) = w$ (przy oczywistej konwencji dla charakterystyki 2) jest złożeniem sześciu automorfizmów trójkątnych.*

Dowód. W poniższym rozumowaniu, w przypadku pierścieni charakterystyki dwa, w miejsce liczby 2 należy wstawić liczbę 0. Niech τ_1, τ_2, τ_3 będą automorfizmami pierścienia $R[x, y, z, w]$ odpowiednio postaci:

$$\begin{array}{lll lll lll}
\tau_1(x) &=& x & \tau_2(x) &=& x + 2yw - zw^2 & \tau_3(x) &=& x \\
\tau_1(y) &=& y & \tau_2(y) &=& y & \tau_3(y) &=& y - zw \\
\tau_1(z) &=& z & \tau_2(z) &=& z & \tau_3(z) &=& z \\
\tau_1(w) &=& w + xz + y^2 & \tau_2(w) &=& w & \tau_3(w) &=& w\ ,
\end{array}$$

Są to oczywiście automorfizmy trójkątne pierścienia $R[x, y, z, w]$ dla każdego pierścienia R. Ponadto $\tau_1(w - (xz + y^2)) = w$, więc

$$\tau_1^{-1}(w) = w - (xz + y^2),$$

i oczywiście $\tau_1^{-1}(x) = x$, $\tau_1^{-1}(y) = y$, $\tau_1^{-1}(z) = z$. Analogicznie pokazujemy, że

$$\tau_2^{-1}(x) = x - 2yw + zw^2 \qquad \text{oraz} \qquad \tau_3^{-1}(y) = y + zw.$$

Do zakończenia dowodu wystarczy udowodnić, że

$$\overline{\sigma} = \tau_2 \circ \tau_3 \circ \tau_1 \circ \tau_3^{-1} \circ \tau_2^{-1} \circ \tau_1^{-1}.$$

W tym celu wystarczy pokazać, że

$$(1) \qquad \overline{\sigma} \circ \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \circ \tau_1^{-1} \circ \tau_3^{-1} \circ \tau_2^{-1}(a) = a \qquad \text{dla} \qquad a \in \{x, y, z, w\}.$$

Ponieważ $\sigma(xz+y^2) = xz+y^2$ (patrz (1.2) w [2]), więc

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}\circ\tau_1(x) &= \overline{\sigma}(x)\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1(y) &= \overline{\sigma}(y)\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1(z) &= z\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1(w) &= \tau_1(w)\ ,
\end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2(x) &= x-2y(xz+y^2)-z(xz+y^2)^2\\
&\quad +2[y+z(xz+y^2)][w+(xz+y^2)]-z[w+(xz+y^2)]^2\\
&= x+2yw-zw^2=\tau_2(x)\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2(y) &= \overline{\sigma}(y)\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2(z) &= z\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2(w) &= \tau_1(w).
\end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2\circ\tau_3(x) &= \tau_2(x)\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2\circ\tau_3(y) &= y+z(xz+y^2)-z[w+(xz+y^2)]=y-zw=\tau_3(y)\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2\circ\tau_3(z) &= z\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2\circ\tau_3(w) &= \tau_1(w),
\end{aligned}$$

i w konsekwencji

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2\circ\tau_3\circ\tau_1^{-1}(x) &= \tau_2(x)\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2\circ\tau_3\circ\tau_1^{-1}(y) &= \tau_3(y)\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2\circ\tau_3\circ\tau_1^{-1}(z) &= z\\
\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2\circ\tau_3\circ\tau_1^{-1}(w) &= w+(xz+y^2)-[(x+2yw-zw)z+(y-zw)^2]=w.
\end{aligned}$$

Z powyższego wynika, że $\overline{\sigma}\circ\tau_1\circ\tau_2\circ\tau_3\circ\tau_1^{-1}\circ\tau_3^{-1}=\tau_2$, a więc wynika (1). $\square$

Literatura

[1] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian Conjecture*, Progress in Mathematics, 190, Birkhäuser-Verlag, Basel, 2000.

[2] M. Nagata, *On automorphism group of* $k[x,y]$, Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1972.

[3] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, *The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2003), 197-227 (electronic).

[4] M. K. Smith, *Stably tame automorphisms*, J. Pure and Appl. Algebra **58** (1989) 209-212.

ON THE NAGATA AUTOMORPHISM

Summary. Let R be a commutative ring with unity. We prove that the Nagata automorphism σ of $R[x,y,z]$

$$\begin{array}{rcl} \sigma(x) & = & x - 2y(xz+y^2) - z(xz+y^2)^2 \\ \sigma(y) & = & y + z(xz+y^2) \\ \sigma(z) & = & z \end{array}$$

is a composition of a finite number of elementary automorphisms after the extension of it to the automorphism of $R[x,y,z,w]$ by setting $\sigma(w) = w$.

Łódź, 10 – 14 stycznia 2005 r.