MATERIAŁY NA XXVII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ

2006 **Łódź** **str. 63**

O $\mathcal{C}^0$-DETERMINOWALNOŚCI DŻETÓW

Stanisław Spodzieja (Łódź)

Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono pewne szczegóły dowodów twierdzeń Kuipera, Kuo oraz Bochnaka i Łojasiewicza dotyczących wpływu wykładnika Łojasiewicza gradientu funkcji na $\mathcal{C}^0$-determinowalność dżetów.

1 $\mathcal{C}^r$-równoważność funkcji

Jednym z ważniejszych problemów teorii katastrof zaproponowanej przez René Thoma [27] jest klasyfikacja osobliwości odwzorowań i funkcji gładkich w punkcie. Oznaczając przez $f : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^s, b)$ odwzorowanie f określone w pewnym otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}^s$ takie, że $f(a) = b$, problem ten można sformułować następująco:

Problem 1. *Jakie warunki muszą spełniać odwzorowania gładkie $f, g : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^s, b)$ (klasy $\mathcal{C}^k$; analityczne), aby istniały dyfeomorfizmy $\varphi : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^n, a)$, $\psi : (\mathbb{R}^s, b) \to (\mathbb{R}^s, b)$ (klasy $\mathcal{C}^r$; izomorfizmy analityczne) takie, że*

(1) $$g \circ \varphi = \psi \circ f \quad \text{w pewnym otoczeniu punktu } a.$$

Odwzorowania f, g spełniające (1) nazywamy *równoważnymi w punkcie* a (odpowiednio $\mathcal{C}^r$*-równoważnymi; analitycznie równoważnymi*), jeśli φ, ψ są dyfeomorfizmami (odpowiednio klasy $\mathcal{C}^r$; izomorfizmami analitycznymi).

Powyższy problem zilustrujemy przykładami.

Przykład 1. *Niech $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Wszystkie funkcje $f : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, postaci*

$$f(x) = a_0 x^k + a_{k+1} x^{k+1} + a_{k+2} x^{k+2} + \cdots, \qquad a_0 \neq 0,$$

są analitycznie równoważne w zerze. Istotnie, wystarczy pokazać, że każda taka funkcja jest analitycznie równoważna w zerze funkcji $g(x) = x^k$, $x \in \mathbb{R}$. Biorąc $\psi(t) = t \operatorname{sgn} a_0$, $t \in \mathbb{R}$ oraz

$$\varphi(x) = x \sqrt[k]{|a_0 + a_{k+1} x + a_{k+2} x^2 + \cdots|} \quad \text{w pewnym otoczeniu zera,}$$

widzimy że φ i ψ są izomorfizmami analitycznymi oraz $\psi \circ f = g \circ \varphi$ w pewnym otoczeniu zera.

Dla funkcji wielu zmiennych problem 1 nie jest tak prosty jak w przykładzie 1 dla jednej zmiennej.

Przykład 2. *Niech*

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + a x_2^5, \qquad g(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_2^5, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest parametrem. Wówczas wielomiany f i g mają ten sam wielomian Taylora rzędu 3 w zerze, równy $x_1^2 x_2$, jednak:

- *Dla $a > 0$, funkcje f i g są analitycznie równoważne w zerze, bowiem dla izomorfizmu analitycznego*

  $$\varphi(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{\sqrt[10]{a}} \cdot x_1,\ \sqrt[5]{a} \cdot x_2 \right), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

  mamy $f = g \circ \varphi$ w $\mathbb{R}^2$.
- *Dla $a \leqslant 0$, funkcje f i g nie są nawet $\mathcal{C}^0$-równoważne w zerze, bowiem łatwym rachunkiem sprawdzamy, że ich zbiory zer mają inne ilości składowych topologicznych w każdym sąsiedztwie punktu $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Zatem nie są one homeomorficzne w żadnym otoczeniu punktu $(0, 0)$.*

W przykładach 1, 2 otrzymywaliśmy równoważność analityczną funkcji analitycznych. Można wskazać funkcje analityczne, które mają osobliwości bardzo podobne, są $\mathcal{C}^0$-równoważne w punkcie, jednak nie są one analitycznie równoważne. Świadczy o tym następujący

Przykład 3. (Whitney). *Niech*

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 + x_2)(x_1 - a x_2), \quad g(x_1, x_2) = x_1 x_2 (x_1 + x_2)(x_1 - b x_2),$$

gdzie $a, b > 0$ są parametrami. W myśl wniosku 1 w punkcie 2, dla każdych $a, b > 0$ funkcje f i g są $\mathcal{C}^0$-równoważne w zerze. Dla $a \neq b$, funkcje f i g nie są nawet

$\mathcal{C}^1$-równoważne. Gdyby istniały dyfeomorfizmy $\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, $\psi : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $\psi \circ f = g \circ \varphi$ w pewnym otoczeniu zera, to różniczka $d_0\varphi$ w zerze musiałaby przekształcać przestrzenie styczne w zerze do składowych $f^{-1}(0)$ na odpowiednie przestrzenie styczne do składowych $g^{-1}(0)$. Wówczas $d_0\varphi(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$ co, jak łatwo sprawdzić, jest niemożliwe.

W świetle powyższego przykładu widzimy, że klasyfikacja analityczna funkcji prowadzi do bardzo bogatej rodziny różnych klas. Skierowało to badania równoważności funkcji na badanie $\mathcal{C}^r$-równoważności, a szczególnie $\mathcal{C}^0$-równoważności w punkcie. W opracowaniu koncentrujemy się na $\mathcal{C}^0$-równoważności funkcji klasy $\mathcal{C}^k$.

2 $\mathcal{C}^0$-determinowalność dżetów

Przykłady 1 i 2 narzucają następujący szczególnie ważny przypadek problemu 1:

Problem 2. *Jakie warunki należy narzucić na wielomiany Taylora funkcji f i g aby funkcje te były $\mathcal{C}^0$-równoważne w zerze?*

Problem ten prowadzi do pojęcia $\mathcal{C}^0$-determinowalności dżetów.

k-dżetem funkcji $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ klasy $\mathcal{C}^k$ nazywamy rodzinę wszystkich funkcji $g : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$, klasy $\mathcal{C}^k$, posiadających ten sam k-ty wielomian Taylora w zerze co funkcja f:

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \sum_{i_1,\dots,i_j=1}^{n} \frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}}(0) x_{i_1} \cdots x_{i_j}.$$

Funkcję f nazywamy *$\mathcal{C}^k$-realizacją* tego dżetu. Przez $J^k(n)$ oznaczamy zbiór wszystkich k-dżetów funkcji n zmiennych klasy $\mathcal{C}^k$. k-dżet funkcji f możemy utożsamiać z k-tym wielomianem Taylora tej funkcji. Zatem $J^k(n)$ jest izomorficzny z $\mathbb{R}^N$, gdzie $N = \binom{n+k}{n} - 1$.

k-dżet nazywamy *$\mathcal{C}^0$-determinowalnym w klasie $\mathcal{C}^k$*, jeśli dowolne dwie jego $\mathcal{C}^k$-realizacje są $\mathcal{C}^0$-równoważne w zerze.

R. Thom [27] (patrz też [12]) udowodnił, że dodając do dowolnego wielomianu "generyczne" formy "wysokich stopni" uzyskujemy k-dżet $\mathcal{C}^0$-determinowalny w odpowiedniej klasie (zachodzi to również dla k-dżetów odwzorowań). Dokładniej, mamy

Twierdzenie 1. (R. Thom). *Oznaczmy przez $\pi_s : J^{k+s}(n) \to J^k(n)$ naturalne rzutowanie. Niech $v \in J^k(n)$. Wówczas istnieją $s > 0$ oraz właściwy podzbiór algebraiczny $\Sigma \subset \pi_s^{-1}(v)$, że każdy $(k+s)$-dżet $w \in \pi_s^{-1}(v) \setminus \Sigma$ jest $\mathcal{C}^0$-determinowalny w klasie $\mathcal{C}^{k+s}$.*

Twierdzenie to uogólnili Bochnak i Łojasiewicz [1] pokazując, że $s = 1$ (patrz własność 1 w punkcie 3).

W przypadku k-dżetów problem 2 można zapisać następująco:

Problem 3. *Jakie warunki należy narzucić na k-dżet aby był on $\mathcal{C}^0$-determinowalny w klasie $\mathcal{C}^k$?*

$\mathcal{C}^0$-determinowalność dżetu implikuje topologiczną równoważność (w otoczeniu zera) zbiorów zer jego realizacji. Prowadzi to do następnego pojęcia:

k-dżet nazywamy *V-determinowalnym w klasie $\mathcal{C}^k$*, jeśli dla dowolnych dwu jego $\mathcal{C}^k$-realizacji f, g, zbiory $f^{-1}(0)$, $g^{-1}(0)$ są homeomorficzne w pewnym otoczeniu zera.

Rozwiązaniem problemu 3 jest następujące piękne twierdzenie:

Twierdzenie 2. (Kuiper-Kuo, Bochnak-Łojasiewicz). *Niech v będzie k-dżetem oraz f jego $\mathcal{C}^k$-realizacją, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Następujące warunki są równoważne:*

(a) *v jest $\mathcal{C}^0$-determinowalny w klasie $\mathcal{C}^k$,*

(b) *v jest V-determinowalny w klasie $\mathcal{C}^k$,*

(c) *$|\nabla f(x)| \geqslant C|x|^{k-1}$ w pewnym otoczeniu punktu $0 \in \mathbb{R}^n$ dla pewnej stałej $C > 0$, gdzie ∇f oznacza gradient funkcji f.*

W powyższym twierdzeniu implikacja (a)⇒(b) jest oczywista; implikację (b)⇒(c) udowodnili Bochnak i Łojasiewicz [1]; implikację (c)⇒(a) zaś udowodnili Kuiper [10] i Kuo [11]. Dowód Bochnaka i Łojasiewicza (nie wprost) polega na konstrukcji odpowiedniej $\mathcal{C}^k$-realizacji dżetu, której zbiór zer nie jest rozmaitością topologiczną w żadnym sąsiedztwie punktu 0. Wiadomo bowiem, że dla każdej $\mathcal{C}^k$-realizacji f, k-dżetu V-determinowalnego, zbiór zer $f^{-1}(0)$ jest rozmaitością topologiczną lub zbiorem pustym w pewnym sąsiedztwie zera (patrz lemat 2 w punkcie 4). Dowody Kuipera i Kuo polegają na konstrukcji homeomorfizmu φ (patrz definicja $\mathcal{C}^0$-równoważności) przy użyciu rozwiązania ogólnego odpowiedniego układu równań różniczkowych zwyczajnych. Dowód twierdzenia 2 dokładniej omawiamy w punkcie 4.

Podobnie jak implikację (c)⇒(a) twierdzenia 2, w punkcie 4 dowodzimy

Wniosek 1. *Jeśli $f, g \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ są formami jednorodnymi rozkładającymi się na iloczyny form liniowych bez czynników wielokrotnych oraz $\deg f = \deg g$, to f i g są $\mathcal{C}^0$-równoważne w zerze.*

Oczywiście implikacja (a)⇒(b) w twierdzeniu 2 zachodzi również w dziedzinie zespolonej, gdzie zamiast funkcji klasy $\mathcal{C}^k$ należy rozważyć klasę funkcji holomorficznych. Łatwo sprawdzamy, że również dowód implikacji (c)⇒(a) przenosi się bez żadnych zmian na przypadek zespolony. Niestety dowód Bochnaka i Łojasiewicza implikacji (b)⇒(c) jest typowo rzeczywisty, nie przenosi się na przypadek funkcji holomorficznych. Implikację tę nad $\mathbb{C}$ uogólnił Teissier [26], pokazując, że dla funkcji holomorficznej $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, najmniejsza liczba całkowita k taka, że k-dżet funkcji f jest $\mathcal{C}^0$-determinowalny w klasie funkcji holomorficznych, spełnia nierówność $k \geqslant [\,\mathcal{L}_0\,(\nabla f)] + 1$, gdzie $[x]$ oznacza całość z liczby x. Nierówność $k \leqslant [\,\mathcal{L}_0\,(\nabla f)] + 1$ udowodnili Chang i Lu [2] opierając się na pracy Kuo [11].

Problem determinowalności dżetów leży w kręgu zainteresowań wielu matematyków, oprócz wymienionych wyżej, między innymi: Kirschenbauma i Lu [7]; Koike [8]; Kucharza [9]; Kuo [12]; Kuo i Lu [14]; Lu [16]; Pelczara [20], [21]; Płoskiego [23]; Randalla [24]; Takensa [25]; Trotmana [29].

3 Wykładnik Łojasiewicza

Niech $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^k$. W świetle twierdzenia 2, szczególnego znaczenia nabiera, optymalny (tzn. najmniejszy) wykładnik α w *nierówności Łojasiewicza* [19]:

$$\text{(Ł)} \qquad |\nabla f(x)| \geqslant C|x|^\alpha \quad \text{w otoczeniu zera dla pewnego } C > 0.$$

Wykładnik ten nazywamy *wykładnikiem Łojasiewicza gradientu* ∇f w zerze i oznaczamy $\mathcal{L}_0\,(\nabla f)$. Jest to oczywiście niezmiennik osobliwości, to znaczy zachowuje się przy dyfeomorficznej zamianie zmiennych. Znajomość tego wykładnika i jego związki z innymi niezmiennikami osobliwości pomagają w dokładniejszej charakteryzacji klas różnych osobliwości. Fakt ten spowodował duże zainteresowanie i intensywne badania wykładnika $\mathcal{L}_0\,(\nabla f)$. Zajmowali się nim między innymi: Chądzyński [3], Chądzyński i Krasński [5]; Khadiri i Tougeron [6]; Kuo i Lu [13]; Lejeune-Jalabert i Teissier [18]; Płoski [22]; Teissier [26]; Tougeron [28].

Bochnak i Łojasiewicz uogólnili twierdzenie 1 (patrz [1], strona 259) pokazując, że $s = 1$. Dowód tego uogólnienia polega na zastosowaniu twierdzenia 2 (c)$\Rightarrow$(a) do następującego faktu:

Własność 1. *Dla wielomianu $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ stopnia co najwyżej k istnieje właściwy podzbiór algebraiczny $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$, gdzie $N = \binom{n+k}{n-1}$, taki że dla każdego wielomianu*

$$H_c(x) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=k+1} c_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n},$$

gdzie $c = (c_{i_1,\ldots,i_n}; i_1 + \cdots + i_n = k+1) \in \mathbb{R}^N \setminus \Sigma$, zachodzi:

$$\text{(2)} \qquad \mathcal{L}_0\,(\nabla(f + H_c)) \leqslant k,$$

a więc $|\nabla(f + H_c)(x)| \geqslant C|x|^k$ w pewnym otoczeniu punktu $0 \in \mathbb{R}^n$ dla pewnej stałej $C > 0$ (czyli $f + H_c$ spełnia warunek (c) *twierdzenia 2 dla $k+1$).*

Dowód. Ponieważ dla każdego właściwego podzbioru algebraicznego $V \subset \mathbb{C}^N$, zbiór $V \cap \mathbb{R}^N$ jest właściwym podzbiorem algebraicznym $\mathbb{R}^N$, więc wystarczy udowodnić własność nad $\mathbb{C}$. Niech

$$\begin{aligned}\Omega =&\{c \in \mathbb{C}^N : \exists_{r>0} \;\; \nabla(f+H_c)(x) \neq 0 \;\text{ dla }\; 0<|x|<r\},\\ \Delta =&\{c \in \mathbb{C}^N : \exists_{r>0} \;\; \nabla(f+H_b)(x) \neq 0 \;\text{ dla }\; 0<|x|<r,\; |b-c|<r\}.\\ G =&\{c \in \mathbb{C}^N : \exists_{C,r>0} \;\; |\nabla(f+H_c)(x)| \geqslant C|x|^k \;\text{ dla }\; |x|<r\}.\end{aligned}$$

Zauważmy najpierw, że Ω ma niepuste wnętrze. Istotnie, rozważmy zbiór algebraiczny

$$\Gamma = \{(c,x) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^n : \nabla H_c(x) = 0\}.$$

Niech $\Gamma = \Gamma_1 \cup \ldots \cup \Gamma_l$ będzie rozkładem Γ na składowe nierozkładalne. Oczywiście $\mathbb{C}^N \times \{0\} \subset \Gamma$. Weźmy dowolną składową Γ_{i_0} zbioru Γ taką, że $\mathbb{C}^N \times \{0\} \subset \Gamma_{i_0}$. Pokażemy, że $\mathbb{C}^N \times \{0\} = \Gamma_{i_0}$. Przypuśćmy przeciwnie, że tak nie jest, wtedy $\dim_{\mathbb{C}} \Gamma_{i_0} > N$. Ponieważ $\nabla H_c(x) = 0$ jest układem równań jednorodnych, to łatwo sprawdzamy, że dla każdego $c \in \mathbb{C}^N$ istnieje $x \neq 0$, że $(c,x) \in \Gamma_{i_0}$. To jest jednak niemożliwe, bowiem dla $c \in \mathbb{C}^N$ takiego, że $H_c(x) = x_1^{k+1} + \cdots + x_n^{k+1}$ nie istnieje $x \neq 0$ spełniający $\nabla H_c(x) = 0$. Reasumując $\Gamma_{i_0} = \mathbb{C}^N \times \{0\}$. Oznaczając $A = \bigcup_{i \neq i_0} \{c \in \mathbb{C}^N : (c,0) \in \Gamma_i\}$ widzimy, że jest to właściwy podzbiór algebraiczny $\mathbb{C}^N$. Ponadto dla $c \in \mathbb{C}^N \setminus A$, $\nabla(f+H_c)$ nie ma zer w nieskończoności. Zatem zbiór zer $\nabla(f+H_c)$ jest skończony. To daje, że $\mathbb{C}^N \setminus \Omega \subset A$ i dowodzi zapowiedzianą uwagę.

Uwzględniając powyższą uwagę udowodnimy, że $\mathbb{C}^N \setminus \Delta$ zawiera się we właściwym podzbiorze algebraicznym Σ przestrzeni $\mathbb{C}^N$. Istotnie, niech

$$\Omega_j = \{c \in \mathbb{C}^N : \nabla(f+H_c)(x) \neq 0 \;\text{ dla }\; 0<|x|<\frac{1}{j}\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Wówczas $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$. Z poprzedniej uwagi $\operatorname{Int}\Omega \neq \emptyset$, więc wobec twierdzenia Baire'a, istnieje $j_0 \in \mathbb{N}$, że $\operatorname{Int}\Omega_{j_0} \neq \emptyset$. Niech

$$T = \{(c,x) \in \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^n : \; \nabla(f+H_c)(x) = 0\}$$

oraz niech $T = T_1 \cup \ldots \cup T_m$ będzie rozkładem T na składowe nierozkładalne. Jeśli $\mathbb{C}^N \times \{0\} \not\subset T$, to biorąc $\Sigma = \{c \in \mathbb{C}^N : (c,0) \in T\}$ dostajemy zapowiedzianą uwagę. Załóżmy, że $\mathbb{C}^N \times \{0\} \subset T$. Wtedy istnieje i_0, że $\mathbb{C}^N \times \{0\} \subset T_{i_0}$. Pokażemy, że $\mathbb{C}^N \times \{0\} = T_{i_0}$. Przypuszczając przeciwnie dostajemy $\dim_{\mathbb{C}} T_{i_0} > N$. Zatem każdy punkt $(c,0)$ jest punktem skupienia zbioru $T_{i_0} \setminus [\mathbb{C}^N \times \{0\}]$. W szczególności każdy punkt $(c,0)$, gdzie $c \in \Omega_{j_0}$ jest punktem skupienia zbioru $T_{i_0} \setminus [\mathbb{C}^N \times \{0\}]$. To jest jednak niemożliwe, bowiem Ω_{j_0} ma niepuste wnętrze. W konsekwencji $\mathbb{C}^N \times \{0\} = T_{i_0}$. Biorąc teraz $\Sigma = \bigcup_{i \neq i_0} \{c \in \mathbb{C}^N : (c,0) \in T_i\}$ dostajemy zapowiedzianą uwagę.

Pokażemy w końcu, że $\mathbb{C}^N \setminus \Sigma \subset G$, co zakończy dowód własności. Oprzemy się na oryginalnym dowodzie Bochnaka i Łojasiewicza [1], str. 259. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje $c \in \mathbb{C}^N \setminus \Sigma$ takie, że $c \notin G$. Wtedy istnieje ciąg $(a_\nu) \subset \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, $a_\nu \to 0$, że

$$\frac{|\nabla(f+H_c)(a_\nu)|}{|a_\nu|^k} \to 0, \quad \text{gdy} \quad \nu \to \infty. \tag{3}$$

Oznaczmy $\delta_\nu = \nabla(f + H_c)(a_\nu)$. Zauważmy, że istnieje ciąg $b_\nu \in \mathbb{C}^N$ taki, że

$$\nabla H_{b_\nu}(a_\nu) = \delta_\nu \quad \text{i} \quad b_\nu \to 0. \tag{4}$$

Istotnie, niech $L_\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie izometrią taką, że $L_\nu(\frac{a_\nu}{|a_\nu|}) = (1, 0, \dots, 0)$ oraz $L_\nu(0) = 0$. Oznaczmy przez M_ν macierz odwzorowania L_ν. Wówczas wszystkie współczynniki macierzy M_ν oraz M_ν^{-1} są ograniczone przez 1. Niech $\delta_\nu \cdot M_\nu^{-1} = (\theta_{\nu,1}, \dots, \theta_{\nu,n})$. Wówczas z (3) dostajemy

$$\frac{\theta_{\nu,i}}{|a_\nu|^k} \to 0, \quad \text{gdy} \quad \nu \to \infty \quad \text{dla} \quad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Weźmy wielomiany

$$G_\nu(x) = \frac{\theta_{\nu,1}}{k+1} x_1^{k+1} + \sum_{i=2}^{n} \theta_{\nu,i} x_1^k x_i$$

oraz

$$H_{b_\nu} = \frac{1}{|a_\nu|^k} G_\nu \circ L_\nu.$$

Wówczas

$$\nabla G_\nu(x) = \left(x_1^{k-1}\left(\theta_{\nu,1}x_1 + k\theta_{\nu,2}x_2 + \dots + k\theta_{\nu,n}x_n\right), \theta_{\nu,2}x_1^k, \dots, \theta_{\nu,n}x_1^k\right),$$

więc $\nabla G_\nu(1, 0, \dots, 0) = (\theta_{\nu,1}, \dots, \theta_{\nu,n})$. Stąd

$$\nabla H_{b_\nu}(a_\nu) = \frac{1}{|a_\nu|^k} \nabla G_\nu(L_\nu(\frac{a_\nu}{|a_\nu|}|a_\nu|)) \cdot M_\nu = (\theta_{\nu,1}, \dots, \theta_{\nu,n}) \cdot M_\nu = \delta_\nu.$$

Ponadto z (5) wynika, że $b_\nu \to 0$ gdy $\nu \to \infty$, bowiem b_ν powstają z układów $\left(\frac{\theta_{\nu,1}}{|a_\nu|^k(k+1)}, \frac{\theta_{\nu,2}}{|a_\nu|^k}, \dots, \frac{\theta_{\nu,n}}{|a_\nu|^k}\right)$ przy pomocy przekształceń liniowych o współczynnikach wspólnie ograniczonych. W konsekwencji (4) zostało udowodnione. Reasumując, z (4) i określenia ciągu δ_ν dostajemy

$$\nabla(f + H_{c-b_\nu})(a_\nu) = \nabla(f + H_c)(a_\nu) - \nabla H_{b_\nu}(a_\nu) = 0$$

i $c - b_\nu \in \mathbb{C}^N \setminus \Sigma \subset \Delta$ dla dostatecznie dużych ν (bowiem $c - b_\nu \to c$, gdy $\nu \to \infty$). To przeczy definicji zbioru Δ i kończy dowód. $\square$

Własność 1 daje natychmiast następujące jej uogólnienie.

Wniosek 2. *Niech $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ będzie funkcją analityczną oraz $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Wówczas istnieje właściwy podzbiór algebraiczny $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$, gdzie $N = \binom{n+k}{n-1}$, że dla każdego $c = (c_{i_1,\dots,i_n}; i_1 + \dots + i_n = k+1) \in \mathbb{R}^N \setminus \Sigma$, zachodzi $\mathcal{L}_0(\nabla(f + H_c)) \leqslant k$, gdzie $H_c(x) = \sum_{i_1+\dots+i_n=k+1} c_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$.*

Dowód. Niech $f = g + h + u$, gdzie $g : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej k, $h : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ jest wielomianem jednorodnym stopnia $k+1$ oraz $u : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ jest funkcją analityczną taką, że $\operatorname{ord}_0 u > k+1$. W myśl własności 1 istnieje właściwy podzbiór algebraiczny $\Sigma_1 \subset \mathbb{R}^N$ taki, że dla każdego $c \in \mathbb{R}^N \setminus \Sigma_1$ zachodzi $\mathcal{L}_0(\nabla(g + H_c)) \leqslant k$. Niech $c_0 \in \mathbb{R}^N$ będzie układem współczynników wielomianu h. Wówczas $\Sigma_2 = \{c - c_0 : c \in \Sigma_1\}$ jest właściwym podzbiorem algebraicznym $\mathbb{R}^N$ oraz dla każdego $c \in \mathbb{R}^N \setminus \Sigma_2$ zachodzi $\mathcal{L}_0(\nabla(g + h + H_c)) \leqslant k$. Ponieważ $\operatorname{ord}_0 u > k+1$, to $|\nabla u(x)| \leqslant C|x|^{k+1}$ w pewnym otoczeniu zera dla pewnego $C > 0$. Stąd i z poprzedniego łatwo dostajemy $\mathcal{L}_0(\nabla(f + H_c)) \leqslant k$. □

Twierdzenie 1 i Własność 1 zilustrujemy przykładem.

Przykład 4. *Niech $f \in J^2(2)$ będzie postaci $f(x_1, x_2) = x_1^2$.*

Wówczas f nie jest 2-dżetem $\mathcal{C}^0$-determinowalnym w klasie $\mathcal{C}^2$, na przykład zbiór zer jego $\mathcal{C}^2$-realizacji $g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^4$ nie jest homeomorficzny $f^{-1}(0)$ w żadnym otoczeniu zera.

Kładąc $\Sigma = \mathbb{R}^3 \times \{0\}$, dla każdego $c = (c_1, c_2, c_3, c_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \Sigma$ oraz formy $H_c(x) = c_1x_1^3 + c_2x_1^2x_2 + c_3x_1x_2^2 + c_4x_2^3$ dostajemy, że zbiory zer wielomianów $\frac{\partial(f+H_c)}{\partial x_1}$ i $\frac{\partial(f+H_c)}{\partial x_2}$ nie mają wspólnych stycznych w zerze. Zatem $\mathcal{L}_0(\nabla(f+H_c)) \leqslant 2$ i w myśl twierdzeni 2, 3-dżet $f + H_c$, $c \in \mathbb{R}^4 \setminus \Sigma$, jest $\mathcal{C}^0$-determinowalny w klasie $\mathcal{C}^3$.

Uwaga 1. *Warto wrócić na chwilę do wielomianu $g(x_1, x_2) = x_1^2x_2 + x_2^5$ z przykładu 2. Obliczymy $\mathcal{L}_0(\nabla g)$. W obliczeniach wygodnie jest przejść do przypadku zespolonego. W przypadku zespolonym wykładnik Łojasiewicza gradientu ∇g definiujemy analogicznie jak powyżej i oznaczamy $\mathcal{L}_0^{\mathbb{C}}(\nabla g)$. Stosując wyniki Chądzyńskiego i Krasińskiego (twierdzenie 1 w [5], patrz też [4]) dostajemy, że wykładnik $\mathcal{L}_0^{\mathbb{C}}(\nabla g)$ jest osiągnięty na zbiorze*

$$S = \{z \in \mathbb{C}^2 : \frac{\partial g}{\partial z_1}(z)\frac{\partial g}{\partial z_2}(z) = 0\}.$$

Łatwo sprawdzamy, że $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, gdzie

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathbb{C} \times \{0\}, & S_2 &= \{0\} \times \mathbb{C}, \\ S_3 &= \{(-i\sqrt{5}t^2, t) \in \mathbb{C}^2 : t \in \mathbb{C}\}, & S_4 &= \{(i\sqrt{5}t^2, t) \in \mathbb{C}^2 : t \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Wtedy

$$\begin{aligned} &\nabla g|_{S_1}(t, 0) = (0, t^2), & &\nabla g|_{S_2}(0, t) = (0, 5t^4), \\ &\nabla g|_{S_3}(-i\sqrt{5}t^2, t) = (-2i\sqrt{5}t^3), & &\nabla g|_{S_1}(i\sqrt{5}t^2, t) = (-2i\sqrt{5}t^3). \end{aligned}$$

Stąd dostajemy $\mathcal{L}_0^{\mathbb{C}}(\nabla g) = 4$. W szczególności $\mathcal{L}_0(\nabla g) \leqslant 4$. A ponieważ $\nabla g(0, t) = (0, 5t^4)$ dla $t \in \mathbb{R}$, więc $\mathcal{L}_0(\nabla g) = 4$.

Wielomian $f = x_1^2x_2 + ax_2^5$ jest $\mathcal{C}^4$-realizacją 4-dżetu v wielomianu g. Ponieważ $\mathcal{L}_0(\nabla g) = 4 = 5-1$, więc wobec (Ł) i twierdzenia 2, 4-dżet v nie jest $\mathcal{C}^0$-determonowalny. Jest to zgodne ze stwierdzeniem w przykładzie 2, że dla $a \leqslant 0$ funkcje f i g nie są równoważne w zerze. Wobec twierdzenia 2, 5-dżet funkcji g jest $\mathcal{C}^0$-determinowalny w klasie $\mathcal{C}^5$. Oznacza to, że dodanie do g dowolnych wyrazów stopnia co najmniej 6, prowadzi do funkcji równoważnej g w zerze.

4 Dowód twierdzenia 2

Implikacja (c)⇒(a). Zacznijmy od prostego lematu.

Lemat 1. *Niech $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i $W : G \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Jeśli w $G \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ ma miejsce globalna jednoznaczność rozwiązań układu*

$$\frac{dy}{dt} = W(t,y) \tag{6}$$

oraz istnieje otoczenie $U \subset G$ zbioru $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cap G$ i stała $C > 0$, że

$$|W(t,x)| \leqslant C|x| \quad dla \quad (t,x) \in U, \tag{7}$$

to w G ma miejsce globalna jednoznaczność rozwiązań układu (6).

Dowód. Wobec założenia, że w $G\setminus(\mathbb{R}\times\{0\})$ ma miejsce jednoznaczność rozwiązań układu (6), wystarczy pokazać, że lokalnie układ (6) ma jednoznaczne rozwiązanie przechodzące przez punkt 0. Załóżmy, że $(t_0, 0) \in G$. Oczywiście odwzorowanie $y_0(t) = 0$ określone w pewnym otoczeniu punktu t_0, jest rozwiązaniem układu (6). Przypuśćmy, że istnieje jeszcze jedno rozwiązanie $y_1 : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ układu (6) takie, że $y_1(t_0) = 0$. Wówczas y_0, y_1 spełniają układ równań całkowych

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} W(\xi, y(\xi))d\xi. \tag{8}$$

Niech $0 < \varepsilon < \frac{1}{C}$ będzie takie, że wykresy rozwiązań $y_0, y_1 : I \to \mathbb{R}^n$, gdzie $I = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \subset (a,b)$, przebiegają w U. Wówczas istnieje $\eta \in I$, że

$$\varrho := \sup_{t \in I} |y_0(t) - y_1(t)| = |y_0(\eta) - y_1(\eta)|$$

Wobec przypuszczenia, mamy $\varrho > 0$. Zatem (8) i założenie (7) daje

$$\varrho = \left| \int_{t_0}^{\eta} [W(\xi, y_0(\xi)) - W(\xi, y_1(\xi))] d\xi \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{\eta} C|y_1(\xi))| d\xi \right| \leqslant C\varrho\varepsilon < \varrho,$$

co jest niemożliwe. □

Dowód implikacji (c)⇒(a). Dla $k = 1$ implikacja wynika prosto z twierdzenia o lokalnym odwracaniu funkcji. Załóżmy więc, że $k > 1$. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie k-tym wielomianem Taylora k-dżetu v i niech g będzie $\mathcal{C}^k$-realizacją dżetu v. Wystarczy pokazać, że funkcje f i g są $\mathcal{C}^0$ równoważne. Z wyboru funkcji g mamy

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - f(x)}{|x|^k} = 0,$$

więc dla każdego $\varepsilon_0 > 0$ istnieje $\delta_0 > 0$ takie, że

$$|g(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon_0 |x|^k \qquad \text{dla} \quad |x| < \delta_0. \tag{9}$$

Można założyć, że funkcja g jest określona w $\mathbb{R}^n$. Niech $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$F(\xi, x) = f(x) + \xi(g(x) - f(x)), \qquad \xi \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zauważmy, że (por. Kuo [11], Lemma 1, p. 168) istnieją $\varepsilon, \delta > 0$, że

$$|\nabla F(\xi, x)| \geqslant \varepsilon |x|^{k-1} \quad \text{dla} \quad |x| < \delta \quad \text{i} \quad -2 < \xi < 2. \tag{10}$$

Istotnie, ponieważ f i g są funkcjami klasy $\mathcal{C}^k$, to $\nabla(g-f)$ jest odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^{k-1}$. Z wyboru g dostajemy, że $k-1$-szy wielomian Taylora w zerze odwzorowania $\nabla(g - f)$ znika, więc

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\nabla(g - f)(x)|}{|x|^{k-1}} = 0.$$

Zatem istnieje $\delta > 0$, że dla $|x| < \delta$, mamy

$$|\nabla(g - f)(x)| \leqslant \frac{C}{4} |x|^{k-1},$$

gdzie C jest określone w warunku (c) twierdzenia 2. Ponieważ

$$\nabla F(\xi, x) = [(g - f)(x), \nabla f(x) + \xi \nabla(g - f)(x)], \tag{11}$$

więc biorąc $\varepsilon = \frac{C}{2}$ oraz $|x| < \delta$ i $-2 < \xi < 2$, z założenia (c), dostajemy

$$|\nabla F(\xi, x)| \geqslant |\nabla f(x) + \xi \nabla(g - f)(x)| \geqslant |\nabla f(x)| - 2|\nabla(g - f)(x)| \geqslant \varepsilon |x|^{k-1}.$$

To daje (10). Można oczywiście założyć, że $\varepsilon = \varepsilon_0$ oraz $\delta = \delta_0 < \frac{1}{2}$.

Połóżmy $G = \{(\xi, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |x| < \delta, \ -2 < \xi < 2\}$, gdzie ε i δ są wybrane powyżej. Rozważmy odwzorowanie $X : G \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

$$X(\xi, x) = (X_1, \ldots, X_{n+1}) = \frac{(g(x) - f(x))}{|\nabla F(\xi, x)|^2} \nabla F(\xi, x), \qquad \text{gdy} \quad x \neq 0$$

oraz $X(\xi, 0) = 0$. Wobec (9) i (10) dla $(\xi, x) \in G$, $x \neq 0$, mamy

$$|X(\xi, x)| \leqslant \frac{\varepsilon |x|^k}{|\nabla F(\xi, x)|} \leqslant \frac{\varepsilon |x|^k}{\varepsilon |x|^{k-1}} = |x|. \tag{12}$$

Nierówność ta również zachodzi dla $x = 0$, więc X jest odwzorowaniem ciągłym.

Określmy w G pole wektorowe $W : G \to \mathbb{R}^n$,

$$W(\xi, x) = \frac{1}{X_1(\xi, x) - 1}[X_2(\xi, x), \dots, X_{n+1}(\xi, x)].$$

Wobec (12) dostajemy, że

$$|X_1(\xi, x) - 1| \geqslant 1 - |X(\xi, x)| \geqslant 1 - |x| > 1 - \delta > \frac{1}{2} \quad \text{dla} \quad (\xi, x) \in G,$$

więc pole W jest poprawnie określone. Ponadto jest ono ciągłe oraz

$$|W(\xi, x)| \leqslant 2|x| \qquad \text{dla} \quad (\xi, x) \in G. \tag{13}$$

Rozważmy układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$\frac{dy}{dt} = W(t, y). \tag{14}$$

Ponieważ $k > 1$, więc pole W jest w zbiorze $G \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ co najmniej klasy $\mathcal{C}^1$, zatem jest to pole lokalnie lipschitzowskie. W konsekwencji w zbiorze $G \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$ ma miejsce jednoznaczność rozwiązań układu (14). Stąd, wobec (13) i lematu 1 dostajemy globalną jednoznaczność rozwiązań tego układu w G. Ponieważ $y_0(t) = 0$, $t \in (-2, 2)$ jest rozwiązaniem układu (14), więc z powyższego dostajemy, że istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}^n$ punktu 0 takie, że każde rozwiązanie integralne y_x układu (14) z warunkiem początkowym $y_x(0) = x$, gdzie $x \in U$, jest określone w przedziale $[0, 1]$.

Określmy teraz odwzorowanie $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, wzorem

$$\varphi(x) = y_x(1),$$

gdzie y_x jest rozwiązaniem integralnym układu (14) z warunkiem początkowym $y_x(0) = x$. Odwzorowanie φ jest oczywiście różnowartościowe i ciągłe. Zauważmy, że φ jest homeomorfizmem pewnego otoczenia zera na otoczenie zera. Istotnie, rozważając rozwiązania $\overline{y}_x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ równania (14) z warunkiem początkowym $\overline{y}_x(1) = x$, gdzie x należy do pewnego otoczenia zera, dostajemy, że $\varphi(\overline{y}_x(0)) = x$. Analogicznie jak powyżej dowodzimy, że odwzorowanie $x \mapsto \overline{y}_x(0)$ jest ciągłe w otoczeniu zera. W konsekwencji $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ jest homeomorfizmem pewnego otoczenia zera na otoczenie zera.

Zauważmy na koniec, że dla każdego $x \in U$,

$$F(t, y_x(t)) = \text{const.} \quad \text{w} \quad [0, 1]. \tag{15}$$

Istotnie, z określenia pola W wynika, że pole $[1, W] : G \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ spełnia

$$[1, W(\xi, x)] = \frac{1}{X_1(\xi, x) - 1}(X(\xi, x) - e_1) \qquad \text{dla} \quad (\xi, x) \in G,$$

gdzie $e_1 = [1, 0, \ldots, 0] \in \mathbb{R}^{n+1}$. Oznaczając więc przez $\langle a, b\rangle$ iloczyn skalarny wektorów a, b i uwzględniając (11) dla $t \in [0, 1]$, dostajemy

$$\begin{aligned}\frac{dF(t, y_x(t))}{dt} &= \langle (\nabla F)(t, y_x(t)), [1, W(t, y_x(t))]\rangle \\ &= \frac{1}{X_1(t, y_x(t)) - 1}\left(\langle (\nabla F)(t, y_x(t)), X(t, y_x(t))\rangle - \frac{\partial F}{\partial \xi}(t, y_x(t))\right) \\ &= \frac{1}{X_1(t, y_x(t)) - 1}\big(g(y_x(t)) - f(y_x(t)) - g(y_x(t)) + f(y_x(t))\big) = 0.\end{aligned}$$

To daje (15). Reasumując, z (15) dla $x \in U$, mamy

$$f(x) = F(0, x) = F(0, y_x(0)) = F(1, y_x(1)) = F(1, \varphi(x)) = g(\varphi(x)).$$

To kończy dowód implikacji (c)⇒(a) w twierdzeniu 2. □

Dowód wniosku 1. Niech $k = \deg f$. Wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy

$$f(x) = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)h(x) \quad \text{i} \quad g(x) = (\beta_2 x_1 + \beta_2 x_2)h(x),$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ i $h \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ jest formą stopnia $k-1$. Ponadto można założyć, że f i g nie różnią się jedynie czynnikiem stałym oraz, że obszar $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 > 0,\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 > 0\}$ jest rozłączny ze zbiorem $h^{-1}(0)$. Wtedy istnieje przedział (a, b) taki, że $[0, 1] \subset (a, b)$ i dla każdego $\xi \in (a, b)$, funkcja liniowa

$$L_\xi(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2) + (1 - \xi)[(\alpha_2 - \alpha_1)x_1 + (\beta_2 - \beta_1)x_2]$$

nie dzieli formy h. Niech $F(\xi, x) = f(x) + \xi(g(x) - f(x))$. Wówczas $F(\xi, x) = L_\xi(x)h(x)$, więc dla każdego $\xi \in (a, b)$, funkcja F nie ma czynników wielokrotnych. Zatem po ewentualnym zmniejszeniu przedziału (a, b) tak, że $[0, 1] \subset (a, b)$, stosując lemat o wyborze krzywej, łatwo pokazujemy, że F spełnia (10) dla $\xi \in (a, b)$. Ponieważ $g - f$ jest formą stopnia k, więc spełnia (9) dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$. Powtarzając teraz dalszą część dowodu implikacji (c)⇒(a) w twierdzeniu 2, dostajemy tezę. □

Implikacja (b)⇒(c). W opracowaniu dowodu tej implikacji, opierałem się na oryginalnym dowodzie Bochnaka i Łojasiewicza [1]. Przypuszczając, że implikacja nie zachodzi, dowód ten polega na konstrukcji odpowiedniej $\mathcal{C}^k$-realizacji dżetu, której zbiór zer nie jest rozmaitością topologiczną w żadnym sąsiedztwie punktu 0. Zachodzi bowiem następujący:

Lemat 2. *Niech v będzie k-dżetem V-determinowalnym w klasie $\mathcal{C}^k$ oraz niech f będzie $\mathcal{C}^k$-realizacją dżetu v. Wówczas istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}^n$ punktu 0 takie, że $f^{-1}(0) \cap (U \setminus \{0\})$ jest $(n-1)$-wymiarową rozmaitością topologiczną lub zbiorem pustym.*

Dowód. Niech g będzie k-tym wielomianem Taylora dżetu v. Wówczas

$$h = g + x_1^{k+1} + \cdots + x_n^{k+1}$$

jest $\mathcal{C}^k$-realizacją dżetu v. Ponadto ∇h nie ma zer w nieskończoności (nawet nad $\mathbb{C}$), więc jego zbiór zer jest skończony. Zatem teza wynika z twierdzenia o funkcji uwikłanej i definicji V-determinowalności. $\square$

Kluczowym punktem w dowodzie rozważanej implikacji jest własność 2 podana dalej. W dowodzie tej własności zastosujemy poniższy lemat Morsa, który wynika z udowodnionej wcześniej implikacji (c)$\Rightarrow$(a) w twierdzeniu 2 (por. [17] Lemat 2.2).

Wniosek 3. (Lemat Morsa). *Niech f będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^2$ w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$ taką, że*

$$f(a) = 0, \qquad \nabla f(a) = 0 \qquad \text{i} \qquad \det\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right] \neq 0. \tag{16}$$

Wówczas istnieje homeomorfizm $\varphi : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^n, a)$ oraz liczba całkowita $0 \leqslant l \leqslant n$, że

$$f \circ \varphi(x) = \sum_{i=1}^{l} (x_i - a_i)^2 - \sum_{i=l+1}^{n} (x_i - a_i)^2 \quad \textit{w pewnym otoczeniu punktu } a.$$

Dowód. Wystarczy ograniczyć się do przypadku $a = 0$. Wówczas z (16), 2-gi wielomian Taylora funkcji f jest formą kwadratową: $h(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) x^i x^j$. Z założenia (16), po odpowiednim wybraniu liniowego układ współrzędnych, można przyjąć, że

$$h(x) = \sum_{i=1}^{l} x_i^2 - \sum_{i=l+1}^{n} x_i^2 \quad \text{dla pewnego} \quad l \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant l \leqslant n.$$

Bezpośrednio sprawdzamy, że $|\nabla h(x)| = 2|x|^{2-1}$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Stąd i z udowodnionej implikacji (c)$\Rightarrow$(a) w twierdzeniu 2, 2-dżet funkcji h jest $\mathcal{C}^0$-determinowalny w klasie $\mathcal{C}^2$. Ponieważ f jest $\mathcal{C}^2$-realizacją tego dżetu, więc istnieje homeomorfizm $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ taki, że $f \circ \varphi = h$ w pewnym otoczeniu zera. $\square$

W dowodzie własności 2 potrzebne będą również dwa znane fakty topologiczne. Zacznijmy od definicji.

Zbiór $S^l = \{(x_1, \ldots, x_{l+1}) \in \mathbb{R}^{l+1} : x_1^2 + \cdots + x_{l+1}^2 = 1\}$ nazywamy *sferą jednostkową* wymiaru l. Zbiór homeomorficzny ze sferą S^l również nazywamy *sferą* l*-wymiarową*.

Niech A będzie rozmaitością topologiczną i S — sferą w A. Odwzorowania $\varphi, \psi : S \to A$ nazywamy *homotopijnymi w A*, gdy istnieje odwzorowanie ciągłe $H : S \times [0,1] \to A$ takie, że

$$H(x, 0) = \varphi(x) \qquad \text{i} \qquad H(x, 1) = \psi(x) \qquad \text{dla} \qquad x \in S.$$

Odwzorowanie H nazywamy *homotopią odwzorowań φ i ψ w A*.

Mówimy, że sfera S jest *ściągalna do punktu w A*, gdy istnieje punkt $a \in A$ taki, że odwzorowanie $\varphi : S \ni x \mapsto x \in A$ jest homotopijne w A z odwzorowaniem stałym $\psi : S \ni x \mapsto a$. Homotopię odwzorowań φ i ψ nazywamy *homotopią ściągającą S do punktu w A*.

Lemat 3. *Niech A będzie rozmaitością topologiczną wymiaru k oraz $a \in A$. Jeśli $1 \leqslant l \leqslant k-2$, to istnieje otoczenie $U \subset A$ punktu a takie, że każda l-wymiarowa sfera $S \subset U \setminus \{a\}$ jest ściągalna do punktu w $U \setminus \{a\}$.*

Dowód. Wybierając otoczenie $U \subset A$ punktu a homeomorficzne z $\mathbb{R}^k$, możemy założyć, że $U = \mathbb{R}^k$ i $a = 0$. Weźmy dowolną l-wymiarową sferę $S \subset \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ i homeomorfizm $\varphi : S^l \to S$. Aproksymując φ odwzorowaniem wielomianowym $\psi : S^l \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, można założyć, że φ i ψ są w $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ homotopijne. Łatwo znajdziemy prostą $E \subset \mathbb{R}^k \setminus \psi(S^l)$ taką, że $0 \in E$. Dla dowolnego $a \in E$ odwzorowania ψ i $a + \psi$ są homotopijne w $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Ponadto istnieje $a \in E$ takie, że 0 nie należy do otoczki wypukłej zbioru $(a + \psi(S^l))$. Zatem $a + \psi$ jest homotopijne w $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ z odwzorowaniem stałym. □

Lemat 4. *Sfery $S = \{(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l : x_1^2 + \cdots + x_l^2 = r^2\}$, gdzie $r > 0$ nie można w $\mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ ściągnąć do punktu.*

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje homotopia $H : S \times [0,1] \to \mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ ściągająca S do punktu. Można oczywiście założyć, że $r = 1$ i że $H(S \times [0,1]) \subset S$. Wówczas $h(x) = H(\frac{x}{|x|}, 1 - |x|)$ gdy $0 < |x| \leqslant 1$ i $h(0) = H(y, 1)$, gdzie $y \in S$, jest odwzorowaniem ciągłym kuli $D = \{x \in \mathbb{R}^l : |x| \leqslant r\}$ na sferę S, przy czym $h(x) = x$ dla $x \in S$. Zatem S jest retraktem kuli D, co jest niemożliwe. □

Własność 2. *Niech $n > 1$ i $f : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}, 0)$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^2$ spełniającą założenia* (16) *lematu Morsa. Wówczas $f^{-1}(0)$ nie jest topologiczną rozmaitością wymiaru $n-1$ w żadnym otoczeniu punktu a.*

Dowód. Wobec wniosku 3 (Lemat Morsa), wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy $a = 0$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} x_i^2 - \sum_{i=l+1}^{n} x_i^2$$

oraz $f^{-1}(0) \neq \{0\}$. Wtedy $1 \leqslant l < n$. Można oczywiście założyć, że $l \leqslant \frac{n}{2}$.

Jeśli $l = 1$, to teza jest oczywista, wtedy bowiem zbiór $f^{-1}(0) \setminus \{0\}$ ma co najmniej cztery składowe topologiczne w każdym otoczeniu punktu 0 dla $n = 2$, zaś co najmniej dwie takie składowe dla $n > 2$. Można więc założyć, że $n > 2$ oraz $l > 1$ i wtedy

$$1 \leqslant l - 1 \leqslant (n-1) - 2. \tag{17}$$

Przypuśćmy teraz, że dla pewnego otoczenia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ punktu $0 \in \mathbb{R}^n$,

zbiór $A = f^{-1}(0) \cap \Omega$ jest rozmaitością topologiczną wymiaru $n-1$.

Wówczas, wobec (17) i lematu 3, istnieje otoczenie $U \subset A$ zera takie, że każda $l-1$-wymiarowa sfera $S \subset U \setminus \{0\}$ jest ściągalna w $U \setminus \{0\}$ do punktu. Biorąc jednak dla dostatecznie małego $r > 0$, sferę $l-1$-wymiarową

$$S = \{(x_1, \ldots, x_l) \in \mathbb{R}^l : x_1^2 + \cdots + x_l^2 = r^2\}$$

oraz punkt $\overset{o}{x} = (\overset{o}{x}_{l+1}, \ldots, \overset{o}{x}_n) \in \mathbb{R}^{n-l}$ taki, że $\overset{o}{x}{}_{l+1}^{2} + \cdots + \overset{o}{x}{}_{n}^{2} = r^2$, widzimy, że $S \times \{\overset{o}{x}\} \subset U \setminus \{0\}$. Z przypuszczenia, sfera $S \times \{\overset{o}{x}\}$ jest w $U \setminus \{0\}$ ściągalna do punktu. Niech $H = (h_1, \ldots, h_n) : S \times \{\overset{o}{x}\} \times [0,1] \to U \setminus \{0\}$ będzie homotopią ściągającą $S \times \{\overset{o}{x}\}$ w $U \setminus \{0\}$ do punktu. Wtedy

$$h_1^2 + \cdots + h_l^2 = h_{l+1}^2 + \cdots + h_n^2 \quad \text{w} \quad S \times \{\overset{o}{x}\} \times [0,1].$$

Zatem $h_1^2 + \cdots + h_l^2$ nigdzie nie znika w $S \times \{\overset{o}{x}\} \times [0,1]$, więc $(h_1, \ldots, h_l)$ jest homotopią ściągającą S w $\mathbb{R}^l \setminus \{0\}$ do punktu. To przeczy tezie lematu 4. $\square$

Uwaga 2. *Założenia* det $\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right] \neq 0$ *we wniosku 2 nie można opuścić. Świadczy o tym przykład wielomianu* $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^3$, *który dla* $a = 0$ *nie spełnia tego załżenia i* $f^{-1}(0) = \{(t,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ *jest rozmaitością topologiczną wymiaru* 1.

W dowodzie omawianej implikacji istotną rolę odgrywa następująca znana nierówność Bochnaka i Łojasiewicza [1].

Lemat 5. (Nierówność Bochnaka-Łojasiewicza) *Niech* $0 < \theta < 1$. *Jeśli* $f : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ *jest funkcją analityczną, to*

$$|x||\nabla f(x)| \geqslant \theta |f(x)| \qquad \textit{w pewnym otoczeniu punktu } 0.$$

Dowód implikacji (b)⇒(c). Z (b) wynika, że k-ty wielomian Taylora h funkcji f jest niezerowy. W przeciwnym bowiem razie funkcje $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = x_1^{k+1}$ byłyby $\mathcal{C}^k$-realizacjami k-dżetu V-determinowalnego w klasie $\mathcal{C}^k$, co jest niemożliwe. Stąd, w przypadku $n = 1$, $\mathcal{L}_0(\nabla f) = \operatorname{ord}_0 f' \leqslant k-1$, czyli (c) zachodzi. Załóżmy więc, że $n > 1$.

Rozważmy przypadek $k = 1$. Wówczas z (b) wynika, że $\nabla f(0) \neq 0$. W przeciwnym bowiem razie funkcje $f_1(x) = x_1^2$ i $f_2(x) = x_1 x_2$ byłyby $\mathcal{C}^1$ realizacjami 1-dżetu v oraz $f_1^{-1}(0)$ $f_2^{-1}(0)$ nie byłyby homeomorficzne w żadnym otoczeniu zera. Z warunku $\nabla f(0) \neq 0$ dostajemy (c). Możemy więc założyć, że $k > 1$.

Ponieważ

$$\lim_{x \to 0} \frac{\nabla f(x) - \nabla h(x)}{|x|^{k-1}} = 0,$$

więc $\mathcal{L}_0(\nabla f) \leqslant k-1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L}_0(\nabla h) \leqslant k-1$. Wystarczy więc ograniczyć rozważania do przypadku, gdy $f = h$.

Przypuśćmy przeciwnie, że (c) nie zachodzi. Wówczas dla pewnego ciągu $(a_\nu) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ takiego, że $a_\nu \to 0$, gdy $\nu \to \infty$, mamy

$$\frac{|\nabla f(a_\nu)|}{|a_\nu|^{k-1}} \to 0, \qquad \text{gdy} \quad \nu \to \infty. \tag{18}$$

Zatem, nierówność Bochnaka-Łojasiewicza (lemat 5) daje, że

$$\frac{|f(a_\nu)|}{|a_\nu|^{k}} \to 0, \qquad \text{gdy} \quad \nu \to \infty. \tag{19}$$

Wybierając ewentualnie podciąg ciągu (a_ν), możemy założyć że $|a_{\nu+1}| \leqslant \frac{1}{2}|a_\nu|$ dla $\nu \in \mathbb{N}$. Wówczas

$$B_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a_\nu| \leqslant \frac{1}{4}|a_\nu|\}, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad \text{jest rodziną kul rozłącznych.}$$

Weźmy dowolny ciąg $(\lambda_\nu) \subset \mathbb{R}$ taki, że

$$\frac{\lambda_\nu}{|a_\nu|^{k-2}} \to 0, \qquad \text{gdy} \quad \nu \to \infty. \tag{20}$$

Ponieważ $k > 1$, więc możemy założyć, że

$$\lambda_\nu \quad \text{nie jest wartością własną macierzy} \quad \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_\nu)\right]. \tag{21}$$

Niech $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$ taką, że $\alpha(x) = 0$ dla $|x| \geqslant \frac{1}{4}$ oraz $\alpha(x) = 1$ w pewnym otoczeniu punktu 0. Rozważmy funkcję $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określoną wzorami:

$$F(x) = \alpha\left(\frac{x - a_\nu}{|a_\nu|}\right)\left(f(a_\nu) + d_{a_\nu} f(x - a_\nu) + \frac{1}{2}\lambda_\nu |x - a_\nu|^2\right) \quad \text{dla} \quad x \in B_\nu$$

oraz $F(x) = 0$ dla $x \notin \bigcup_{\nu=1}^\infty B_\nu$. Wówczas F jest funkcją klasy $\mathcal{C}^k$ (nawet klasy $\mathcal{C}^\infty$) oraz $F(0) = 0$. Ponadto $f(a_\nu) = F(a_\nu)$ i $\nabla f(a_\nu) = \nabla F(a_\nu)$, więc

$$(f - F)(a_\nu) = 0 \quad \text{i} \quad \nabla(f - F)(a_\nu) = 0 \qquad \text{dla} \quad \nu \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Niech $M > 0$ będzie takie, że $|\alpha(x)| \leqslant M$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas dla $x \in B_\nu$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{|F(x)|}{|x|^k} &\leqslant M \frac{|f(a_\nu) + d_{a_\nu} f(x - a_\nu) + \frac{1}{2}\lambda_\nu |x - a_\nu|^2|}{|x|^k} \\ &\leqslant 2^k M \frac{|f(a_\nu)| + |\nabla f(a_\nu)||a_\nu| + \frac{1}{2}|\lambda_\nu||a_\nu|^2}{|a_\nu|^k}.\end{aligned}$$

Stąd, z (18), (19) i (20) dostajemy

$$\frac{|F(x)|}{|x|^k} \to 0, \qquad \text{gdy} \qquad x \to 0.$$

W konsekwencji $f - F$ jest $\mathcal{C}^k$-realizacją k-dżetu v. Wobec (22) i założenia (b), z lematu 2 wynika, że $(f-F)^{-1}(0)$, w każdym dostatecznie małym sąsiedztwie punktu $0 \in \mathbb{R}^n$, jest $n-1$-wymiarową rozmaitością topologiczną. Z drugiej strony, (21) daje

$$\det \left[\frac{\partial^2 (f-F)}{\partial x_i \partial x_j}(a_\nu) \right] \neq 0 \qquad \text{dla} \quad \nu \in \mathbb{N},$$

więc uwzględniając (22) i stosując własność 2 dostajemy, że $(f-F)^{-1}(0)$ nie jest rozmaitością topologiczną wymiaru $n-1$ w żadnym otoczeniu punktu a_ν, w szczególności nie jest to rozmaitość topologiczna w żadnym sąsiedztwie punktu 0 (bowiem $a_\nu \to 0$). Otrzymana sprzeczność kończy dowód. $\square$

Literatura

[1] J. Bochnak, S. Łojasiewicz, *A converse of the Kuiper-Kuo theorem.* Proc. of Liverpool Singularities-Symposium I (1969/70), pp.254–261, Lecture Notes in Math., vol. 192, Springer, Berlin, 1971.

[2] S. H. Chang, Y. C. Lu, *On C^0-sufficiency of complex jets.* Canad. J. Math. 25 (1973), 874–880.

[3] J. Chądzyński, *On the order of an isolated zero of a holomorphic mapping.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 31 (1983), no. 3-4, 121–128.

[4] J. Chądzyński, T. Krasiński, *The Łojasiewicz exponent of an analytic mapping of two complex variables at an isolated zero.* Singularities (Warsaw, 1985), 139–146, Banach Center Publ., 20, PWN, Warsaw, 1988.

[5] J. Chądzyński, T. Krasński, *A set on which the local Łojasiewicz exponent is attained.* Ann. Polon. Math. 67 (1997), no. 3, 297–301.

[6] A. EL Khadiri, J.-Cl. Tougeron, *Familles noethériennes de modules sur $k[\![x]\!]$ et applications.* (French) [Noetherian families of modules of $k[\![x]\!]$ and applications] Bull. Sci. Math. 120 (1996), no. 3, 253–292.

[7] M. Kirschenbaum, Y. C. Lu, *Sufficiency of Weierstrass jets.* Canad. J. Math. 35 (1983), no. 1, 167–176.

[8] S. Koike, *C^0-sufficiency of jets via blowing-up.* J. Math. Kyoto Univ. 28 (1988), no. 4, 605–614.

[9] W. Kucharz, *Examples in the theory of sufficiency of jets.* Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), no. 1, 163–166.

[10] N. H. Kuiper, *C^1-equivalence of functions near isolated critical points*, Proc. Sym. in Infinite Dimensional Topology. (Baton Rouge, 1967), 199–218. Ann. of Math. Studies, 69, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1972.

[11] T. C. Kuo, *On C^0-sufficiency of jets of potential functions*, Topology 8, (1969) 167–171.

[12] T. C. Kuo, *Characterizations of v-sufficiency of jets*. Topology 11 (1972) 115–131.

[13] T. C. Kuo, Y. C. Lu, *On analytic function germs of two complex variables*. Topology 16 (1977), no. 4, 299–310.

[14] T. C. Kuo, Y. C. Lu, *Sufficiency of jets via stratification theory*. Invent. Math. 57 (1980), no. 3, 219–226.

[15] A. Lenarcik, J. Gwoździewicz, *O C^0-dostateczności dżetów rzeczywistych i zespolonych*, Materiały XXII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Wyd. UŁ, Łódź, 2001, 7-12.

[16] Y. C. Lu, *Sufficiency of jets in $J^r(2, 1)$ via decomposition*. Invent. Math. 10 (1970), 119–127.

[17] J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1963.

[18] M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier, *Cloture integrale des ideaux et equisingularite*, Centre de Mathématiques Ecole Polytechnique, 1974.

[19] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division*, Studia Math. 18 (1959), 87–136; and Rozprawy Matem. 22 (1961).

[20] A. Pelczar, *Remarks on sufficiency of jets*. Bull. Acad. Polon. Sci. Sr. Sci. Math. Astronom. Phys. 25 (1977), no. 7, 623–632.

[21] A. Pelczar, *Sufficiency of jets by the method of integral inequalities*, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagiellon. Prace Mat. No. 20 (1979), 17–32.

[22] A. Płoski, *Multiplicity and the Łojasiewicz exponent*, in: Banach Center Publ. 20, PWN, (1988), 353–364.

[23] A. Płoski, *On the Jacobian ideal and sufficiency of jets*. Bull. Polish Acad. Sci. Math. 41 (1993), no. 4, 343–348.

[24] J. D. Randall, *Topological sufficiency of smooth map-germs*. Invent. Math. 67 (1982), no. 1, 117–121.

[25] F. Takens, *A note on sufficiency of jets*, Invent. Math. 13 (1971), 225–231.

[26] B. Teissier, *Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces.* (French) Invent. Math. 40 (1977), no. 3, 267–292.

[27] R. Thom, *Local topological properties of differentiable mappings*. Differential Analysis, Bombay Colloq. Oxford Univ. Press, London, (1964), 191–202.

[28] J.-Cl. Tougeron, *Inégalités de Łojasiewicz globales.* (French) [Global Lojasiewicz inequalities] Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41 (1991), no. 4, 841–865.

[29] D. Trotman, *Regular stratifications and sufficiency of jets.* Algebraic geometry (La Rbida, 1981), 492–500, Lecture Notes in Math., 961, Springer, Berlin-New York, 1982.

On $\mathcal{C}^0$-sufficiency of jets

Summary. We explain certain details of proofs of Kuiper, Kuo and Bochnak-Łojasiewicz theorems concerning relations between the Łojasiewicz exponent of the gradient of a function and $\mathcal{C}^0$-sufficiency of jets.

Łódź, 9 – 13 stycznia 2006 r.