MATERIAŁY NA XXVIII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2007 **Łódź** **str. 51**

O UKŁADACH RÓWNAŃ I NIERÓWNOŚCI WIELOMIANOWYCH

Stanisław Spodzieja (Łódź)

Streszczenie

Celem opracowania jest przedstawienie znaczenia metody Sturma w geometrii zbiorów semialgebraicznych. Dokładniej, w opracowaniu zajmiemy się następującymi zagadnieniami:

1. Twierdzenie Sturma.
2. Zbiory semialgebraiczne.
3. Twierdzenie Tarskiego-Seidenberga.
4. Lemat R. Thoma. Rozkład cylindryczny (normalny).

Wstęp

Rozwiązywanie równań algebraicznych interesowało matematyków od czasów starożytnych. Narzucały je problemy geometryczne wynikające z zagadnień praktycznych. Już starożytni Babilończycy umieli rozwiązywać równania kwadratowe (około 1950 r przed Chrystusem). Wobec braku algorytmu rozwiązywania równań wyższych stopni, wielu matematyków rozważało problem istnienia i ilości ich rozwiązań rzeczywistych, np.: Kartezjusz (1596-1650), Rolle (1652-1719), Lagrange (1736-1813), Fourier (1768-1830), Cauchy (1789-1857), Sturm (1803-1855), Hermite (1822-1901), Kronecker (1823-1891). Pierwsze pełne rozwiązanie tego problemu (choć niezbyt przydatne w praktyce) podał Cauchy [2]-[4]. Prosty algorytm obliczania ilości zer wielomianu, wykorzystujący idee Fouriera, podał Sturm [20], [21] (patrz twierdzenie 1 w punkcie 1). Wynik ten zyskał ogromne uznanie wśród matematyków, co oddaje opinia Hermite:

"Twierdzenie Sturma zrobiło wielką furorę stając się natychmiast klasycznym i na zawsze znalazło miejsce w nauce. Jego dowód, w którym używane są tylko najbardziej elementarne metody, jest rzadkim przykładem prostoty i elegancji" (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Sturm.html).

Metoda Sturma zaowocowała później w pracach Tarskiego [22], [23] dotyczących opuszczania kwantyfikatorów w formułach oraz pracy Meserve [15] o układach nierówności wielomianowych. Wyniki Tarskiego znalazły odbicie w pracy Seidenberga [19] o istnieniu rozwiązań układu równań i nierówności wielomianowych. Obecnie twierdzenia Tarskiego i Seidenberga formułuje się następująco:

"rzut zbioru semialgebraicznego jest zbiorem semialgebraicznym"

i nazywa twierdzeniem Tarskiego-Seidenberga (patrz twierdzenie 3 w punkcie 4). Jest ono jednym z podstawowych faktów geometrii zbiorów semialgebraicznych.

Przedstawiane opracowanie poświęcone jest dowodom twierdzeń Sturma (w punkcie 1) i Tarskiego-Seidenberga (w punkcie 4) nad $\mathbb{R}$ oraz ich zastosowaniu w geometrii semialgebraicznej. Dowód twierdzenia Sturma przedstawiamy w nieco ogólniejszej sytuacji obejmującej układy równań i nierówności wielomianowych (twierdzenie 2, por. [1], [10]). Analogicznie jak w prezentowanym opracowaniu dowodzi się tego twierdzenia nad domkniętymi ciałami rzeczywistymi (por. [10]).

Równie eleganckim w swej prostocie jak twierdzenie Sturma jest lemat Thoma [11], [14] (twierdzenie 4 w punkcie 6). Ma on ogromne konsekwencje w badaniach zbiorów semialgebraicznych (oraz semianalitycznych). Przy użyciu twierdzenia Tarskiego-Seidenberga pozwala udowodnić, że każda składowa topologiczna zbioru semialgebraicznego jest zbiorem semialgebraicznym oraz, że każdy zbiór semialgebraiczny można rozłożyć na części cylindryczne (twierdzenie 6 w punkcie 7). Fakt ten ma swój odpowiednik w geometrii semi- i sub-analitycznej ([16], [17], [18]). Rozkład cylindryczny prowadzi między innymi do triangulacji zbioru semialgebraicznego [1] (oraz semianalitycznego [12] i sub-analitycznego [7], [13]) i jest podstawowy w badaniach różnego rodzaju stratyfikacji zbiorów.

1 Twierdzenie Sturma

Niech, w dalszym ciągu, t oznacza jedną zmienną. W punkcie tym przedstawimy twierdzenie Sturma o ilości zer wielomianu $P \in \mathbb{R}[t]$ w zadanym przedziale (a, b), $a < b$.

Ciąg Sturma. Niech $P_0, P_1 \in \mathbb{R}[t]$, $P_1 \neq 0$. *Ciągiem Sturma* wielomianów P_0, P_1 nazywamy ciąg wielomianów $P_0, \ldots, P_m \in \mathbb{R}[t]$ określony rekurencyjnie:

(E) $\qquad P_{i-1} = P_i F_i - P_{i+1} \quad \text{oraz} \quad \deg P_{i+1} < \deg P_i \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, m,$

gdzie $P_m \neq 0$ oraz $P_{m+1} = 0$ oraz $F_1, \ldots, F_m \in \mathbb{R}[t]$.

Uwaga 1. *Jeśli* $P_0, \ldots, P_m$ *jest ciągiem Sturma wielomianów* P_0, P_1*, to* P_m *jest największym wspólnym dzielnikiem wielomianów* P_0 *i* P_1*, który oznaczamy* $\mathrm{GCD}\,(P_0, P_1)$. *Powyższy algorytm szukania* $\mathrm{GCD}\,(P_0, P_1)$ *nosi nazwę Algorytmu Euklidesa.*

Definicja. Mówimy, że ciąg $(p_0, \ldots, p_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ *zmienia znak* na i-tym miejscu, gdy istnieje $l \geqslant i$ takie, że

$$p_{i-1}p_l < 0 \quad \text{oraz} \quad p_j = 0 \quad \text{dla} \quad i \leqslant j \leqslant l-1.$$

Definicja. Niech $P \in \mathbb{R}[t]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia. Niech $P_0, \ldots, P_m$ będzie ciągiem Sturma wielomianów P i P' (tzn. $P_0 = P$, $P_1 = P'$). Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ oznaczamy:

$$v_P(a) = \text{ilość miejsc zmian znaku ciągu } P_0(a), \ldots, P_m(a).$$

Przykład 1. *Niech* $P = t^3 - 3t + 1$. *Wówczas ciągiem Sturma wielomianów* P *i* P' *jest*

$$t^3 - 3t + 1, \quad 3t^2 - 3, \quad 2t - 1, \quad \frac{9}{4}.$$

Dla $a = 0$ *mamy* $v_P(0) = 2$*, bowiem ciąg wartości powyższych wielomianów w punkcie* a *ma postać* $(1, -3, -1, \frac{9}{4})$. *Podobnie dla* $a = 1$ *mamy* $v_P(1) = 1$.

Twierdzenie 1. (Sturma). *Niech* $P \in \mathbb{R}[t]$ *będzie wielomianem dodatniego stopnia oraz niech* $a, b \in \mathbb{R}$ *będą takie, że* $a < b$ *i* $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$. *Wówczas wielomian* P *w przedziale* (a, b) *ma dokładnie* $v_P(a) - v_P(b)$ *różnych zer* (*bez uwzględniania ich krotności*).

Dowód. Weźmy ciąg Sturma $P_0, \ldots, P_m$ wielomianów P i P'. Niech $c_1, \ldots, c_k$ będą wszystkimi zerami iloczynu $R = P_0 \cdots P_m$ w przedziale (a, b) i niech $c_1 < \ldots < c_k$. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy wielomian R ma tylko jedno zero w przedziale $[a, b]$, bowiem

$$v_P(a) - v_P(b) = \sum_{i=1}^{k+2} [v_P(\xi_{i-1}) - v_P(\xi_i)],$$

gdzie $a = \xi_0 < \xi_1 < c_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_k < c_k < \xi_{k+1} < \xi_{k+2} = b$. Niech więc c będzie jedynym zerem wielomianu R w przedziale $[a, b]$.

Załóżmy najpierw, że wielomian P nie ma w $\mathbb{R}$ pierwiastków wielokrotnych. Zauważmy, że ciąg $P_0, \ldots, P_m$ spełnia warunki:

1. $P_m(\xi) \neq 0$ dla $\xi \in \mathbb{R}$.

2. Jeśli $P_0(c) = 0$, to $c \in (a, b)$ oraz

$$P_0(\xi)P_1(\xi) < 0 \quad \text{dla} \quad \xi \in [a, c) \quad \text{i} \quad P_0(\eta)P_1(\eta) > 0 \quad \text{dla} \quad \eta \in (c, b].$$

3. Jeśli $P_i(c) = 0$, gdzie $0 < i < m$, to

$$P_{i-1}(\xi)P_{i+1}(\xi) < 0 \qquad \text{dla} \qquad \xi \in [a, b].$$

Istotnie, $P_m = \mathrm{GCD}\,(P, P')$, więc w rozważanym przypadku, P_m nie ma pierwiastków w $\mathbb{R}$, czyli zachodzi 1.

Jeśli $P_0(c) = 0$, to z założenia mamy $c \in (a, b)$. Ponieważ P nie ma pierwiastków wielokrotnych, to $P_1(c) = P'(c) \neq 0$. W konsekwencji P_1 ma ustalny znak w $[a, b]$, wielomian P_0 zaś zmienia znak w punkcie c z "$-$" na "$+$", gdy $P_1(c) > 0$ oraz z "$+$" na "$-$", gdy $P_1(c) < 0$. To daje warunek 2.

Jeśli $P_i(c) = 0$ dla pewnego $1 \leqslant i < m$, to zachodzi warunek 3., bowiem z (E), mamy $P_{i-1}(c) = -P_{i+1}(c)$ i $P_{i+1}(c) \neq 0$, gdyż w przeciwnym razie, $P_i(c) = \ldots = P_m(c) = 0$, co przeczy warunkowi 1.

Pokażemy teraz, że z warunków 1. 2. 3. wynika teza twierdzenia.

Załóżmy, że $P_i(c) = 0$, gdzie $0 < i < m$. Wówczas, wobec warunku 3. dla każdego $\xi \in [a, b]$ ciąg $P_0(\xi), \ldots, P_m(\xi)$ zmienia znak w i-tym lub $i+1$-szym miejscu, zależnie od znaku $P_i(\xi)$. Ponadto ten ciąg nie może jednocześnie zmieniać znaku w i-tym i $i+1$-szym miejscu. Ilość zmian znaków na miejscach $1, \ldots m$ w powyższym ciągu jest więc stała w $[a, b]$.

Załóżmy, że $P(c) = 0$. Wówczas, wobec warunku 2, $c \in (a, b)$ oraz ilość zmian znaku ciągu $P_0(\xi), \ldots, P_m(\xi)$ na pierwszym miejscu zmniejsza się o 1, gdy przechodzimy od $\xi < c$ do $\xi > c$. Uwzględniając więc poprzednie, mamy $v_P(\xi) = v_P(\eta) + 1$ dla $\xi \in [a, c)$ i $\eta \in (c, b]$. W szczególności $v_P(a) - v_P(b) = 1$. To daje tezę w rozważanym przypadku.

Rozważmy teraz przypadek, gdy wielomian P ma czynniki wielokrotne. Wtedy zbiorem zer wielomianu P_m jest zbiór wszystkich zer wielokrotnych wielomianu P. Rozważając ciąg

$$q_0 = \frac{P_0}{P_m}, \quad q_1 = \frac{P_1}{P_m}, \quad \ldots, \quad q_{m-1} = \frac{P_{m-1}}{P_m}, \quad q_m = 1,$$

sprawdzamy łatwo, że spełnia on warunki 1. 2. 3. z poprzedniego przypadku, przy czym zbiory zer P i q_0 pokrywają się. Ponadto dla $\xi \in [a, c) \cup (c, b]$, ilość zmian znaku ciągu $q_0(\xi), \ldots, q_m(\xi)$ jest równa $v_P(\xi)$. W konsekwencji ilość zer wielomianu P w przedziale (a, b) jest równa $v_P(a) - v_P(b)$. $\square$

Wracając do przykładu 1, z twierdzenia 1 dostajemy, że wielomian $P = t^3 - 3t + 1$ ma w przedziale $(0, 1)$ dokładnie jedno zero.

Przejdźmy teraz do obliczania ilości zer wielomianu P w zadanym przedziale (a, b) spełniających dodatkowo nierówność wielomianową $Q(x) > 0$.

Definicja. Niech P, $Q \in \mathbb{R}[t]$ będą wielomianami dodatnich stopni. Niech $P_0, \dots, P_m$ będzie ciągiem Sturma wielomianów P i $P'Q$ (tzn. $P_0 = P$, $P_1 = P'Q$). Dla każdego $a \in \mathbb{R}$ oznaczamy:

$$v_{P,Q}(a) = \text{ilość miejsc zmian znaku ciągu } P_0(a), \dots, P_m(a).$$

Analogicznie jak twierdzenia 1 dowodzimy

Twierdzenie 2. *Niech P, $Q \in \mathbb{R}[t]$ będą wielomianami dodatnich stopni oraz niech $a, b \in \mathbb{R}$ będą takie, że $a < b$ i $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$. Wówczas liczba $v_{P,Q}(a) - v_{P,Q}(b)$ jest równa ilości różnych zer $c \in (a,b)$ wielomianu P takich, że $Q(c) > 0$ minus ilość różnych zer $c \in (a,b)$ wielomianu P takich, że $Q(c) < 0$.*

Dowód. Weźmy ciąg Sturma $P_0, \dots, P_m$ wielomianów P i $P'Q$. Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 1 wystarczy rozważyć przypadek, gdy wielomian $R = P_0 \cdots P_m$ ma dokładnie jedno zero c w przedziale $[a,b]$.

Załóżmy najpierw, że P i $P'Q$ nie mają wspólnych zer w $\mathbb{R}$. Wówczas ciąg Sturma $P_0, \dots, P_m$ spełnia warunki 1. i 3. z dowodu twierdzenia 1 oraz warunek

$2'$. Jeśli $P_0(c) = 0$, to $c \in (a,b)$ oraz

$$P_0(\xi)P_1(\xi)Q(\xi) < 0 \text{ dla } \xi \in [a,c) \text{ i } P_0(\eta)P_1(\eta)Q(\eta) > 0 \text{ dla } \eta \in (c,b].$$

Pokażemy, że z warunków 1. $2'$. 3. wynika teza.

Istotnie, załóżmy, że $P_i(c) = 0$, gdzie $0 < i < m$. Wówczas, wobec warunku 3. dla każdego $\xi \in [a,b]$ ciąg $P_0(\xi), \dots, P_m(\xi)$ zmienia znak w i-tym lub $i+1$-szym miejscu, zależnie od znaku $P_i(\xi)$. Ponadto ten ciąg nie może jednocześnie zmieniać znaku w i-tym i $i+1$-szym miejscu. Ilość zmian znaków na miejscach $1, \dots m$ w powyższym ciągu jest więc stała w $[a,b]$.

Załóżmy, że $P(c) = 0$. Wówczas $Q(\xi) > 0$ dla $\xi \in [a,b]$ lub $Q(\xi) < 0$ dla $\xi \in [a,b]$, ponadto wobec warunku $2'$., $c \in (a,b)$.

Jeśli $Q(\xi) > 0$ dla $\xi \in [a,b]$, to z warunku $2'$., ilość zmian znaku ciągu $P_0(\xi), \dots, P_m(\xi)$ na pierwszym miejscu zmniejsza się o 1, gdy przechodzimy od $\xi < c$ do $\xi > c$. Stąd i z poprzedniego, mamy $v_{P,Q}(\xi) = v_{P,Q}(\eta) + 1$ dla $\xi \in [a,c)$ i $\eta \in (c,b]$, co daje tezę w tym przypadku. Jeśli $Q(\xi) < 0$ dla $\xi \in [a,b]$, to z warunku $2'$. mamy,

$$P_0(\xi)P_1(\xi) > 0 \quad \text{dla} \quad \xi \in [a,c) \quad \text{i} \quad P_0(\eta)P_1(\eta) < 0 \quad \text{dla} \quad \eta \in (c,b],$$

więc ilość zmian znaku ciągu $P_0(\xi), \dots, P_m(\xi)$ na pierwszym miejscu wzrasta o 1, gdy przechodzimy od $\xi < c$ do $\xi > c$. Stąd i z poprzedniego, mamy $v_{P,Q}(\xi) = v_{P,Q}(\eta) - 1$ dla $\xi \in [a,c)$ i $\eta \in (c,b]$, co daje tezę w tym przypadku.

Jeśli wielomiany P i $P'Q$ mają wspólne zera w $\mathbb{R}$, to analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 1, biorąc ciąg

$$q_0 = \frac{P_0}{P_m}, \quad q_1 = \frac{P_1}{P_m}, \quad \dots, \quad q_{m-1} = \frac{P_{m-1}}{P_m}, \quad q_m = 1,$$

pokazujemy, że spełnia on warunki 1. $2'$. 3. i dostajemy tezę. $\square$

Z twierdzenia 2 dostajemy natychmiast:

Wniosek 1. *Niech P, $Q \in \mathbb{R}[t]$ będą wielomianami dodatnich stopni oraz niech $a, b \in \mathbb{R}$ będą takie, że $a < b$ i $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$.*

(a) *Ilość różnych rzeczywistych zer wielomianu P w przedziale (a, b), które nie są zerami wielomianu Q wynosi $v_{P,Q^2}(a) - v_{P,Q^2}(b)$.*

(b) *Ilość różnych rzeczywistych zer wielomianu P w przedziale (a, b), które spełniają nierówność $Q(\xi) > 0$ wynosi*

$$\frac{v_{P,Q}(a) - v_{P,Q}(b) + v_{P,Q^2}(a) - v_{P,Q^2}(b)}{2}.$$

Uogólnimy teraz wniosek 1 na przypadek obliczania ilości zer wielomianu P w zadanym przedziale (a, b) spełniających dodatkowo układ nierówności wielomianowych $Q_1(\xi) > 0, \ldots, Q_k(\xi) > 0$. Zacznijmy od definicji.

Definicja. Dla $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathbb{R}[t]$ oraz $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in \{1, 2\}^k$, kładziemy

$$Q^\sigma = Q_1^{\sigma_1} \ldots Q_k^{\sigma_k}.$$

Wniosek 2. *Niech P, $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathbb{R}[t]$ będą wielomianami dodatnich stopni oraz niech $a, b \in \mathbb{R}$ będą takie, że $a < b$ oraz $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$. Wówczas ilość różnych rzeczywistych zer wielomianu P w przedziale (a, b), które spełniają układ nierówności $Q_1(\xi) > 0, \ldots, Q_k(\xi) > 0$ wynosi*

$$\frac{1}{2^k} \sum_{\sigma \in \{1,2\}^k} [v_{P,Q^\sigma}(a) - v_{P,Q^\sigma}(b)].$$

Dowód. Uwzględniając twierdzenie 2, podobnie jak w poprzednich dowodach wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy wielomian P ma w przedziale $[a, b]$ dokładnie jedno zero oraz $Q_i(\xi) \neq 0$ dla $\xi \in [a, b]$, $i = 1, \ldots, k$. Niech, po ewentualnej zamianie kolejności wielomianów, $l \in \{0, \ldots, k\}$ będzie takie, że dla każdego $\xi \in [a, b]$ zachodzi

$$Q_i(\xi) < 0 \quad \text{dla} \quad 1 \leqslant i \leqslant l \quad \text{oraz} \quad Q_i(\xi) > 0 \quad \text{dla} \quad l < i \leqslant k.$$

Oznaczmy

$$A = \{\sigma \in \{1, 2\}^k : Q^\sigma(x) < 0 \quad \text{dla} \quad x \in [a, b]\} \quad \text{oraz} \quad B = \{1, 2\}^k \setminus A.$$

Jeśli $l = 0$, to $B = \{1, 2\}^k$ i teza jest oczywista. Załóżmy, że $1 \leqslant l \leqslant k$. Wówczas zbiory A i B są równoliczne. Istotnie, jeśli l jest liczbą parzystą, to ilość elementów zbiorów A jest równa $\left[\binom{l}{1} + \binom{l}{3} + \cdots \binom{l}{l-1}\right] 2^{k-l}$, zbioru B zaś, $\left[\binom{l}{0} + \binom{l}{2} + \cdots \binom{l}{l}\right] 2^{k-l}$. Ponieważ $(1 - 1)^l = 0$, więc zbiory A i B są równoliczne. Analogicznie rozważamy przypadek, gdy l jest liczbą nieparzystą. Stąd i z twierdzenia 2, mamy

$$\frac{1}{2^k} \sum_{\sigma \in \{1,2\}^k} [v_{P,Q^\sigma}(a) - v_{P,Q^\sigma}(b)] = \frac{1}{2^k} \left(\sum_{\sigma \in A} + \sum_{\sigma \in B} \right) [v_{P,Q^\sigma}(a) - v_{P,Q^\sigma}(b)] = 0.$$

To daje tezę. $\square$

2 Ograniczenie pierwiastków wielomianu

Niech $P \in \mathbb{R}[t]$ będzie wielomianem postaci

$$P(t) = a_0 t^d + a_1 t^{d-1} + \cdots + a_d \quad \text{gdzie} \quad d > 0 \quad \text{i} \quad a_0 \neq 0.$$

Oznaczmy

$$M_P = 1 + 2 \max_{1 \leqslant i \leqslant d} \left| \frac{a_i}{a_0} \right|^{\frac{1}{i}}.$$

W Analizie dowodzi się

Własność 1. *Jeśli $c \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu P, to $|c| < M_P$.*

Definicja. Niech $P \in D[t]$, gdzie D jest pierścieniem. Przez $\mathrm{lc}(P)$ oznaczamy współczynnik wielomianu P przy najwyższej potędze t.

Z własności 1 wynika natychmiast

Wniosek 3. *Niech $P \in \mathbb{R}[t]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia.*

(a) *Dla każdego $a > M_P$ liczba $P(a)$ ma ten sam znak co $\mathrm{lc}(P)$.*

(b) *Dla każdego $a < -M_P$ liczba $P(a)$ ma ten sam znak co $\mathrm{lc}(P(-t))$.*

Definicja. Niech $P \in \mathbb{R}[t]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia oraz niech $P_1, \ldots, P_m$ będzie ciągiem Sturma wielomianów P i P'. Przyjmujemy:

$v_P(+\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_1), \ldots, \mathrm{lc}(P_m)$.
$v_P(-\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_1(-t)), \ldots, \mathrm{lc}(P_m(-t))$.

Z wniosku 3 dostajemy

Wniosek 4. *Niech $P \in \mathbb{R}[t]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia oraz niech $P_1, \ldots, P_m$ będzie ciągiem Sturma wielomianów P i P'. Wówczas istnieje $r > 0$ takie, że dla każdego $a > r$ zachodzi $v_P(a) = v_P(+\infty)$ oraz dla każdego $a < -r$ zachodzi $v_P(a) = v_P(-\infty)$.*

Analogicznie jak powyżej definiujemy ilość zmian znaku ciągu Sturma wielomianów P i $P'Q$.

Definicja. Niech $P, Q \in \mathbb{R}[t]$ będą wielomianami dodatnich stopni oraz niech $P_1, \ldots, P_m$ będzie ciągiem Sturma wielomianów P i $P'Q$. Przyjmujemy:

$v_{P,Q}(+\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_1), \ldots, \mathrm{lc}(P_m)$.
$v_{P,Q}(-\infty) =$ ilość miejsc zmian znaku ciągu $\mathrm{lc}(P_1(-t)), \ldots, \mathrm{lc}(P_m(-t))$.

Z wniosku 3 dostajemy

Wniosek 5. *Niech $P, Q \in \mathbb{R}[t]$ będą wielomianami dodatnich stopni oraz niech $P_1, \ldots, P_m$ będzie ciągiem Sturma wielomianów P i $P'Q$. Wówczas istnieje $r > 0$ takie, że dla każdego $a > r$ zachodzi $v_{P,Q}(a) = v_{P,Q}(+\infty)$ oraz dla każdego $a < -r$ zachodzi $v_{P,Q}(a) = v_{P,Q}(-\infty)$.*

Stosując teraz twierdzenie Sturma 1 i wniosek 2, dostajemy dwa wnioski

Wniosek 6. *Wielomian dodatniego stopnia $P \in \mathbb{R}[t]$ ma w $\mathbb{R}$ dokładnie $v_P(-\infty) - v_P(+\infty)$ różnych zer (bez uwzględniania ich krotności).*

Wniosek 7. *Niech $P, Q_1, \ldots, Q_k \in \mathbb{R}[t]$ będą wielomianami dodatnich stopni. Wówczas ilość różnych rzeczywistych zer wielomianu P, które spełniają układ nierówności $Q_1(\xi) > 0, \ldots, Q_k(\xi) > 0$ wynosi*

$$\frac{1}{2^k} \sum_{\sigma \in \{1,2\}^k} [v_{P,Q^\sigma}(-\infty) - v_{P,Q^\sigma}(+\infty)].$$

3 Zbiory semialgebraiczne

W dalszym ciągu przez $x = (x_1, \ldots, x_n)$ oznaczamy układ zmiennych. Przez $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ oznaczamy pierścień wielomianów n-zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z $\mathbb{R}$. Punkt $\zeta \in \mathbb{R}^n$ oznaczamy podobnie $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$.

Definicja. Zbiór $V \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy *algebraicznym*, gdy istnieją wielomiany $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, że

$$V = \{\zeta \in \mathbb{R}^n : P_1(\zeta) = \ldots = P_k(\zeta) = 0\}. \tag{1}$$

Uwaga 2. *W dziedzinie rzeczywistej każdy zbiór algebraiczny można zdefiniować przy pomocy jednego równania wielomianowego. Istotnie, niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem algebraicznym postaci (1). Wówczas $P = P_1^2 + \cdots + P_k^2 \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ oraz $V = \{\zeta \in \mathbb{R}^n : P(\zeta) = 0\}$.*

Ważnym uogólnieniem zbiorów algebraicznych są zbiory semialgebraiczne.

Definicja. Oznaczmy przez $\mathcal{SA}_n$, najmniejszą rodzinę podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zawierającą wszystkie zbiory postaci

$$\{\zeta \in \mathbb{R}^n : P(\zeta) > 0\} \qquad \text{gdzie} \qquad P \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$$

i zamkniętą na dopełnienie oraz na iloczyny i sumy skończonych ilości zbiorów. Elementy rodziny $\mathcal{SA}_n$ nazywamy *zbiorami semialgebraicznymi* przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Bezpośrednio z definicji dostajemy:

Własność 2. *Każdy podzbiór semialgebraiczny przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest sumą skończonej ilości zbiorów postaci:*

$$V_{P_1,\ldots,P_k} = \{\zeta \in \mathbb{R}^n : P_1(\zeta) = 0,\ P_2(\zeta) > 0,\ \ldots,\ P_k(\zeta) > 0\}, \tag{2}$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$*,* $k > 0$*, oraz* $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$*. Ponadto zbiory te można tak dobrać aby były one parami rozłączne.*

Dowód. Pierwsza część tezy wynika natychmiast z definicji. Pozostaje pokazać, że zbiory $V_{P_1,\ldots,P_k}$ można tak dobrać aby były one parami rozłączne. Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem semialgebraicznym i niech $P_{i,j} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ będą wszystkimi wielomianami takimi, że X jest sumą zbiorów $V_{P_{1,j},\ldots,P_{m,j}}$, $j = 1, \ldots, m$. Można założyć, że i, j przebiegają ten sam zbiór wskaźników kładąc w razie potrzeby $P_{1,j} = 0$ lub $P_{i,j} = 1$. Ustawmy wielomiany $P_{i,j}$ w ciąg $G_1, \ldots, G_N$, $N = m^2$. Biorąc dla każdego ciągu $\triangleright = (\triangleright_1, \ldots, \triangleright_N) \in \{=, <, >\}^N$, zbiór

$$V_\triangleright = \{\zeta \in \mathbb{R}^n : \ G_1(\zeta) \triangleright_1 0 \ , \ \ldots \ , \ G_N(\zeta) \triangleright_N 0\},$$

widzimy, że zbiory $V_{P_{1,j},\ldots,P_{m,j}} \cap V_\triangleright$, $j = 1, \ldots, m$, $\triangleright \in \{=, <, >\}^N$, spełniają drugą część tezy. □

Stosując własność 2, łatwo indukcyjnie dostajemy

Wniosek 8. *Niech* $X \subset \mathbb{R}^n$ *będzie zbiorem semialgebraicznym. Jeśli* $\mathbb{R}^n \setminus X$ *jest zbiorem gęstym w* $\mathbb{R}^n$*, to* X *zawiera się w pewnym właściwym podzbiorze algebraicznym przestrzeni* $\mathbb{R}^n$*. W szczególności, jeśli* X *ma miarę Lebesgue'a zero, to* X *zawiera się w pewnym właściwym podzbiorze algebraicznym przestrzeni* $\mathbb{R}^n$*.*

4 Twierdzenie Tarskiego-Seidenberga

Niech $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ będzie rzutowaniem postaci

$$\pi(\zeta, \xi) = \zeta.$$

Twierdzenie 3. (Tarski-Seidenberg). *Jeśli zbiór* $X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *jest semialgebraiczny, to jego rzut* $\pi(X) \subset \mathbb{R}^n$ *również jest zbiorem semialgebraicznym.*

Dowód. Wystarczy ograniczyć się do przypadku $m = 1$ oraz zbioru X jednej z następujących postaci:

$$\begin{aligned} X =& \{(\zeta, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : P(\zeta, \xi) = 0\}, \\ X =& \{(\zeta, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : P(\zeta, \xi) = 0, \, Q_1(\zeta, \xi) > 0, \ldots, Q_k(\zeta, \xi) > 0\}, \\ X =& \{(\zeta, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : Q_1(\zeta, \xi) > 0, \ldots, Q_k(\zeta, \xi) > 0\}, \end{aligned}$$

gdzie P, $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, t]$ są wielomianami dodatnich stopni. Łatwo sprawdzamy, że istnieje rozkład $\mathbb{R}^n = Z_1 \cup \ldots \cup Z_s$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ na parami rozłączne zbiory semialgebraiczne takie, że dla $\zeta \in Z_i$ wielomiany $P(\zeta, t), Q_1(\zeta, t), \ldots,$ $Q_k(\zeta, t) \in \mathbb{R}[t]$ mają ustalone stopnie. Można przy tym zakładać, że stopnie te są dodatnie (przenosząc w razie potrzeby warunek $P(\zeta,\xi)=0$ lub $Q_i(\zeta,\xi)>0$ do określenia zbioru Z_i). W ten sposób sprowadzamy zagadnienie do przypadków:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && X=\{(\zeta,\xi)\in Z\times\mathbb{R} : P(\zeta,\xi)=0\},\\
&\text{(ii)} && X=\{(\zeta,\xi)\in Z\times\mathbb{R} : P(\zeta,\xi)=0,\ Q_1(\zeta,\xi)>0,\dots,Q_k(\zeta,\xi)>0\},\\
&\text{(iii)} && X=\{(\zeta,\xi)\in Z\times\mathbb{R} : Q_1(\zeta,\xi)>0,\dots,Q_k(\zeta,\xi)>0\},
\end{aligned}
$$

gdzie $Z\subset\mathbb{R}^n$ jest zbiorem semialgebraicznym oraz dla $\zeta\in Z$, wielomiany $P,Q_1,\dots,Q_k$ mają ustalone dodatnie stopnia względem t.

Rozważmy przypadek (i). Niech $P_1,\dots,P_m\in\mathbb{R}(x_1,...,x_n)[t]$ będzie ciągiem wielomianów określonym wzorem (E). Wówczas $\mathrm{lc}(P_1),\dots,\mathrm{lc}(P_m)$ są funkcjami wymiernymi określonymi i nigdzie nie znikającymi w zbiorze Z. Ponadto dla każdego $\zeta\in Z$ ciąg $P_1(\zeta,t),\dots,P_m(\zeta,t)\in\mathbb{R}[t]$ jest ciągiem Sturma wielomianów $P(\zeta,t)$ i $\frac{\partial P}{\partial t}(\zeta,t)$. Konkretny ciąg zmian znaków ciągu $\mathrm{lc}(P_1)(\zeta),\dots,\mathrm{lc}(P_m)(\zeta)$ można zapisać w postaci układu równań i nierówności postaci

$$
\mathrm{lc}(P_1)(\zeta)\vartriangleright_1 0\ \wedge\ \dots\ \wedge\ \mathrm{lc}(P_m)(\zeta)\vartriangleright_m 0, \tag{3}
$$

gdzie $\vartriangleright_1,\dots,\vartriangleright_m\in\{=,<,>\}$. Zatem warunek $v_{P(\zeta,t)}(-\infty)-v_{P(\zeta,t)}(+\infty)\neq 0$ można zapisać jako alternatywę skończonej ilości koniunkcji postaci (3),

$$
U_1(\zeta)\ \vee\ \dots\ \vee\ U_l(\zeta).
$$

Uwzględniając teraz wniosek 6, dostajemy $\pi(X)=\bigcup_{j=1}^{l}\{\zeta\in\mathbb{R}^n : U_j(\zeta)\}$, więc $\pi(X)$ jest zbiorem semialgebraicznym.

W przypadku (ii) postępujemy podobnie jak w przypadku (i) przy zastosowaniu wniosku 7 zamiast wniosku 6.

Pozostaje rozważyć przypadek (iii). Jeśli stopień względem t wielomianu $Q_1\cdots Q_k$ jest większy od 1, to biorąc $P=\frac{\partial}{\partial t}(Q_1\cdots Q_k)$, sprowadzamy zagadnienie do przypadku (ii). Jeśli stopień względem t wielomianu $Q_1\cdots Q_k$ jest równy 1, to $k=1$ i $Q_1(x,t)=q_0(x)t+q_1(x)$ oraz $q_0(\zeta)\neq 0$ dla $\zeta\in Z$. Zatem dla każdego $\zeta\in Z$ istnieje $\xi\in\mathbb{R}$, że $Q_1(\zeta,\xi)>0$. Stąd wynika, że $\pi(X)=Z$. To daje tezę w tym przypadku i kończy dowód. □

Uwaga 3. *Twierdzenie Tarskiego-Seidenberga mówi o tym, że można opuszczać kwantyfikator szczegółowy w formułach dotyczących równań i nierówności wielomianowych (rzeczywistych) połączonych spójnikami $\sim$, $\vee$, $\wedge$. Ponieważ dopełnienie zbioru semialgebraicznego również jest zbiorem semialgebraicznym, to również w takich formułach można opuszczać kwantyfikator ogólny oraz całe układy kwantyfikatorów.*

W świetle powyższej uwagi, z twierdzenia Tarskiego-Seidenberga dostajemy natychmiast:

Wniosek 9. *Jeśli $X\subset\mathbb{R}^n$ jest zbiorem semialgebraicznym, to jego domknięcie $\overline{X}$, brzeg ∂X i wnętrze $\operatorname{Int}X$ również są zbiorami semialgebraicznymi.*

5 Funkcje semialgebraiczne

Ciekawymi i ważnymi w zastosowaniach są *odwzorowania semialgebraiczne*, to znaczy takie odwzorowania $F : X \to \mathbb{R}^m$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$, których wykresy są podzbiorami semialgebraicznymi przestrzeni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Bezpośrednio z twierdzenia Tarskiego-Seidenberga i uwagi 3 dostajemy:

Wniosek 10. *Jeśli $F : X \to \mathbb{R}^m$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$, jest odwzorowaniem semialgebraicznym, to X jest zbiorem semialgebraicznym oraz obraz $F(Y)$ każdego zbioru semialgebraicznego $Y \subset X$ jest semialgebraiczny.*

Wniosek 11. *Niech $Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem semialgebraicznym oraz niech $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (\zeta, \xi) \mapsto \zeta \in \mathbb{R}^n$. Wówczas*

(a) *zbiór X tych $\zeta \in \mathbb{R}^n$ dla których $\pi^{-1}(\zeta) \cap Y$ jest zbiorem ograniczonym z góry (odpowiednio ograniczonym z dołu) jest semialgebraiczny,*

(b) *funkcja*

$$f^+ : X \ni \zeta \mapsto \sup(\pi^{-1}(\zeta) \cap Y), \quad \big(\text{odp. } f^- : X \ni \zeta \mapsto \inf(\pi^{-1}(\zeta) \cap Y)\big)$$

jest semialgebraiczna, jeśli tylko $X \neq \emptyset$.

Wniosek 12. *Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$, będzie funkcją semialgebraiczną. Wówczas zbiór tych $\zeta \in X$ w których f jest funkcją ciągłą jest semialgebraiczny.*

6 Lemat Thoma

S. Łojasiewicz [11] w badaniach stratyfikacji zbiorów semianalitycznych wprowadza następujący Lemat Thoma.

Twierdzenie 4. (Lemat Thoma). *Niech $P \in \mathbb{R}[t]$ będzie wielomianem stopnia d oraz $P^{(j)}$ będzie j-tą pochodną wielomianu P. Wówczas dla każdego ciągu $\triangleright = (\triangleright_0, \ldots, \triangleright_d) \in \{=, <, >\}^{d+1}$, zbiór*

$$A_\triangleright = \{\xi \in \mathbb{R} : \ P^{(0)}(\xi) \triangleright_0 0 \ \wedge \ldots \wedge \ P^{(d)}(\xi) \triangleright_d 0\} \tag{4}$$

jest spójny. Jest on zbiorem pustym albo zbiorem jednoelementowym albo przedziałem otwartym.

Dowód. Indukcja względem d. Dla $d = 0$ teza jest oczywista. Załóżmy, że teza zachodzi dla wielomianów stopnia $d - 1$ i niech P będzie wielomianem stopnia d. Wielomian $P^{(1)}$ ma stopień $d - 1$, więc z założenia indukcyjnego zbiór

$$A'_\triangleright = \{\xi \in \mathbb{R} : \ P^{(1)}(\xi) \triangleright_1 0 \ \wedge \ldots \wedge \ P^{(d)}(\xi) \triangleright_d 0\}$$

jest pusty albo jednoelementowy albo jest przedziałem otwartym. Jeśli jest to zbiór pusty lub jednoelementowy, to $A_\triangleright$ również jest pusty lub jednoelementowy. Jeśli $A'_\triangleright$ jest przedziałem otwartym, to P' nigdzie nie znika w tym zbiorze, więc P jest w $A'_\triangleright$ funkcją monotoniczną. Stąd dostajemy tezę. $\square$

Definicja. Dla $\triangleright_i \in \{=, <, >\}$, przyjmujemy

$$\underline{\triangleright_i} = \begin{cases} = & \text{dla} \quad \triangleright_i \quad \text{równego} \quad = \\ \leqslant & \text{dla} \quad \triangleright_i \quad \text{równego} \quad < \\ \geqslant & \text{dla} \quad \triangleright_i \quad \text{równego} \quad > . \end{cases}$$

Analogicznie jak twierdzenia 4 dowodzimy

Twierdzenie 5. *Niech $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathbb{R}[t]$ będzie ciągiem wielomianów zamkniętym ze względu na różniczkowanie, tzn. dla każdego Q_i istnieje j, że $Q_j = Q'_i$. Wówczas zbiór*

$$A_\triangleright = \{t \in \mathbb{R} : \ Q_1(t) \triangleright_1 0 \ \wedge \ldots \wedge \ Q_m(t) \triangleright_m 0\}, \tag{5}$$

gdzie $\triangleright = (\triangleright_1, \ldots, \triangleright_m) \in \{=, <, >\}^m$, albo jest zbiorem pustym albo zbiorem jednoelementowym albo przedziałem otwartym. Zaś zbiór

$$A_{\underline{\triangleright}} = \{t \in \mathbb{R} : \ Q_1(t) \underline{\triangleright_1} 0 \ \wedge \ldots \wedge \ Q_m(t) \underline{\triangleright_m} 0\}, \tag{6}$$

albo jest zbiorem pustym; albo zbiorem jednoelementowym; albo przedziałem domkniętym różnym od punktu, którego wnętrzem jest $A_\triangleright$.

Z lematu Thoma (dokładniej z twierdzenia 5) i twierdzenia Tarskiego-Seidenberga dostajemy bardzo użyteczną własność funkcji semialgebraicznych:

Wniosek 13. *Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$, będzie funkcją semialgebraiczną. Wówczas istnieje rozkład $X = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ zbioru X na zbiory semialgebraiczne i parami rozłączne taki, że dla każdego $i = 1, \ldots, k$*

$$\text{obcięcie} \quad f|_{A_i} : A_i \to \mathbb{R} \quad \text{jest funkcją ciągłą.}$$

Dowód. Wobec własności 2, podobnie jak w dowodzie twierdzenia Tarskiego-Seidenberga dostajemy, że wykres Γ funkcji f jest sumą skończonej ilości parami rozłącznych zbiorów postaci:

$$V_Z = \{(\zeta, \xi) \in Z \times \mathbb{R} : P_1(\zeta, \xi) = 0, \, P_2(\zeta, \xi) > 0, \, \ldots, \, P_k(\zeta, \xi) > 0\},$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$, $P_1, \ldots, P_k \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, t]$ oraz $Z \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem semialgebraicznym takim, że dla $\zeta \in Z$ wielomiany $P_1(\zeta, t), \ldots, P_k(\zeta, t)$ mają ustalone stopnia względem t. Bez straty ogólności, wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy $\Gamma \subset V_Z$.

Niech $G_1, \ldots, G_N \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ będzie (najkrótszym) ciągiem wielomianów takim, że wszystkie wielomiany $\frac{\partial P_1}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial P_k}{\partial t}$ są wyrazami tego ciągu oraz dla każdego G_i istnieje j, że $\frac{\partial G_i}{\partial t} = G_j$. Podobnie jak w dowodzie wniosku 2 dla każdego ciągu $\triangleright = (\triangleright_1, \ldots, \triangleright_N) \in \{=, <, >\}^N$, oznaczamy

$$V_\triangleright = \{(\zeta, \xi) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \ G_1(\zeta, \xi) \triangleright_1 0 \ , \ \ldots \ , \ G_N(\zeta, \xi) \triangleright_N 0\}.$$

Wówczas zbiór Γ jest skończoną sumą parami rozłącznych zbiorów semialgebraicznych $V_Z \cap V_\triangleright$, $\triangleright \in \{=, <, >\}^N$. Niech $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \ni (\zeta, \xi) \mapsto \zeta \in \mathbb{R}^n$ oraz

$$A_\triangleright = \pi(V_Z \cap V_\triangleright), \qquad \triangleright \in \{=, <, >\}^N.$$

Wówczas $A_\triangleright$, $\triangleright \in \{=, <, >\}^N$ jest rodziną parami rozłącznych zbiorów semialgebraicznych. W szczególności $f|_{A_\triangleright}$ jest funkcją semialgebraiczną. Ponadto $V_Z \cap V_\triangleright$ jest wykresem obcięcia $f|_{A_\triangleright}$ jeśli tylko $A_\triangleright \neq \emptyset$. Stosując teraz lemat Thoma (twierdzenie 5) dostajemy natychmiast, że domknięcie wykresu funkcji $f|_{A_\triangleright}$ jest wykresem pewnej funkcji. Stąd wynika, że $f|_{A_\triangleright}$ jest funkcją ciągłą. $\square$

7 Rozkład zbioru semialgebraicznego

Bezpośrednio z definicji dostajemy, że każdy podzbiór semialgebraiczny prostej $\mathbb{R}$ jest albo pusty, albo jest sumą zbioru skończonego i skończonej ilości przedziałów. W przypadku $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, stosując lemat Thoma i twierdzenie Tarskiego-Seidenberga, dostajemy następującą charakteryzację:

Twierdzenie 6. *Niech $X \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, będzie zbiorem semialgebraicznym. Wówczas istnieją rozkład przestrzeni $\mathbb{R}^{n-1}$*

$$\mathbb{R}^{n-1} = A_1 \cup \ldots \cup A_m \tag{7}$$

na spójne, parami rozłączne zbiory semialgebraiczne oraz rodzina

$$f_{i,j} : A_i \to \overline{\mathbb{R}}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 0, \ldots, s_i + 1, \tag{8}$$

ciągłych funkcji semialgebraicznych takie, że:

(a) *dla każdego $i = 1, \ldots, m$,*

$$\infty = f_{i,0}(\zeta) < f_{i,1}(\zeta) < \ldots < f_{i,s_i}(\zeta) < f_{i,s_i+1}(\zeta) = +\infty \quad \text{dla} \quad \zeta \in A_i\,, \tag{9}$$

(b) *dla każdego $i = 1, \ldots, m$, następujące zbiory są semialgebraiczne*

$$\mathcal{B}_{i,j} = \{(\zeta, \xi) \in A_i \times \mathbb{R} : \ f_{i,j}(\zeta) < \xi < f_{i,j+1}(\zeta)\}, \quad j = 0, \ldots, s_i\,,$$

$$\mathcal{G}_{i,j} = \{(\zeta, \xi) \in A_i \times \mathbb{R} : \zeta \in A_i, \ \xi = f_{i,j}(\zeta)\}, \quad j = 1, \ldots, s_i\,,$$

(c) *$\mathbb{R}^n$ jest sumą wszystkich zbiorów $\mathcal{B}_{i,j}$ oraz $\mathcal{G}_{i,j}$;*

(d) *X jest sumą pewnej podrodziny powyższej rodziny zbiorów $\mathcal{B}_{i,j}$ oraz $\mathcal{G}_{i,j}$.*

Dowód. Indukcja względem n. Załóżmy, że teza zachodzi dla $n-1$. Pokażemy tezą dla n. Krok indukcyjny obejmuje również przypadek $n = 2$.

Wobec wniosku 2, zbiór X jest sumą skończonej ilości zbiorów postaci (2), czyli:

$$V_{P_1,\dots,P_k} = \{(\zeta,\xi) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : P_1(\zeta,\xi) = 0,\ P_2(\zeta,\xi) > 0,\ \dots,\ P_k(\zeta,\xi) > 0\},$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$, oraz $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Ponadto zbiory te można tak dobrać aby były one parami rozłączne.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $X = V_{P_1,\dots,P_k}$. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia Tarskiego-Seidenberga, wystarczy ograniczyć się do przypadku gdy ζ należy dla pewnego zbioru semialgebraicznego $Z \subset \mathbb{R}^{n-1}$, tzn.

$$V_{P_1,\dots,P_k} = \{(\zeta,\xi) \in Z \times \mathbb{R} : P_1(\zeta,\xi) = 0,\ P_2(\zeta,\xi) > 0,\ \dots,\ P_k(\zeta,\xi) > 0\},$$

gdzie dla $\zeta \in Z$ wielomiany $P_1(\zeta, x_n), \dots, P_k(\zeta, x_n)$ mają ustalone dodatnie stopnie względem x_n.

Niech $G_1, \dots, G_N \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ będzie (najkrótszym) ciągiem wielomianów takim, że wszystkie wielomiany $\frac{\partial P_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial P_k}{\partial x_n}$ są wyrazami tego ciągu oraz dla każdego G_i istnieje j, że $\frac{\partial G_i}{\partial x_n} = G_j$. Podobnie jak w dowodzie wniosku 2 dla każdego ciągu $\triangleright = (\triangleright_1, \dots, \triangleright_N) \in \{=, <, >\}^N$, oznaczamy

$$V_\triangleright = \{(\zeta,\xi) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} :\ G_1(\zeta,\xi) \triangleright_1 0\ ,\ \dots\ ,\ G_N(\zeta,\xi) \triangleright_N 0\}.$$

Wówczas zbiór X jest skończoną sumą parami rozłącznych zbiorów

$$V_{P_1,\dots,P_k,\triangleright} = V_{P_1,\dots,P_k} \cap V_\triangleright, \quad \triangleright \in \{=, <, >\}^N.$$

Ustalmy $V_{P_1,\dots,P_k,\triangleright}$ i oznaczmy ten zbiór przez Y. Zastosujmy teraz lemat Thoma (dokładniej twierdzenie 5) do układu

$$P_1(\zeta,\xi) = 0,\ P_2(\zeta,\xi) > 0,\ \dots,\ P_k(\zeta,\xi) > 0,\ G_1(\zeta,\xi) \triangleright_1 0\ ,\ \dots\ ,\ G_N(\zeta,\xi) \triangleright_N 0,$$

gdzie $\triangleright \in \{=, <, >\}^N$. Wówczas dla każdego $\zeta \in Z$ zbiór tych $\xi \in \mathbb{R}$ które spełniają układ jest albo pusty albo jednoelementowy albo jest przedziałem otwartym. Niech $\pi : \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \ni (\zeta,\xi) \mapsto \zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$. Z twierdzenia Tarskiego-Seidenberga rzut zbioru rozwiązań powyższego układu $\pi(Y)$ jest semialgebraicznym podzbiorem $\mathbb{R}^{n-1}$. W myśl założenia indukcyjnego zbiór $\pi(Y)$ ma skończoną ilość składowych topologicznych i każda z nich jest zbiorem semialgebraicznym (w przypadku $n = 2$ jest to oczywiste). Można więc założyć, że $Z = \pi(Y)$ jest zbiorem spójnym. Oznaczmy

$$f^+ : Z \ni \zeta \mapsto \sup(\pi^{-1}(\zeta) \cap Y), \qquad f^- : Z \ni \zeta \mapsto \inf(\pi^{-1}(\zeta) \cap Y)$$

Stosując wniosek 11, istnieje rozkład zbioru $Z = A_{1,\triangleright} \cup \ldots \cup A_{k,\triangleright}$ na parami rozłączne (i spójne, wobec założenia indukcyjnego) zbiory semialgebraiczne takie, że

$f^+|_{A_{i,\triangleright}}$ i $f^-|_{A_{i,\triangleright}}$ są ciągłymi funkcjami semialgebraicznymi lub $f^+|_{A_{i,\triangleright}} \equiv +\infty$ lub $f^-|_{A_{i,,\triangleright}} \equiv -\infty$. Można również założyć, że

$$f^-|_{A_{i,\triangleright}}(\zeta) < f^+|_{A_{i,\triangleright}}(\zeta) \quad \text{dla} \quad \zeta \in A_{i,\triangleright}$$

lub

$$f^-|_{A_{i,\triangleright}}(\zeta) = f^+|_{A_{i,\triangleright}}(\zeta) \quad \text{dla} \quad \zeta \in A_{i,,\triangleright}.$$

Reasumując zbiór Y (czyli $V_{P_1,\ldots,P_k,\triangleright}$) jest sumą skończonej ilości zbiorów postaci $\mathcal{B}$ lub $\mathcal{G}$.

Biorąc składowe topologiczne wszystkich iloczynów zbiorów $A_{i,\triangleright}$ lub $\mathbb{R}^{n-1} \setminus A_{i,\triangleright}$, po wszystkich $\triangleright \in \{=, <, >\}^N$, łatwo dostajemy rozkład przestrzeni $\mathbb{R}^n$, spełniający tezę twierdzenia w rozważanym przypadku, gdy $X = V_{P_1,\ldots,P_k}$.

Postępując analogicznie jak powyżej dostajemy tezę w ogólnym przypadku. □

Z powyższego twierdzenia dostajemy natychmiast

Wniosek 14. *Każdy zbiór semialgebraiczny ma skończoną ilość składowych topologicznych i każda z nich jest zbiorem semialgebraicznym.*

Twierdzenie 6 stosowane indukcyjnie prowadzi do tzw. *algebraicznego rozkładu cylindrycznego* przestrzeni $\mathbb{R}^n$, tzn. rozkładu spełniającego tezę twierdzenia 6, przy czym zbiory A_i są jednoelementowe lub są przedziałami otwartymi, gdy $n-1=1$ oraz (indukcyjnie) A_i są postaci $\mathcal{B}$ lub $\mathcal{G}$, gdy $n-1>1$.

W świetle twierdzenia 6, dowolny zbiór semialgebraiczny $X \subset \mathbb{R}^n$ ma rozkład cylindryczny, a więc X jest sumą skończonej ilości podrozmaitości przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Możemy więc określić *wymiar zbioru* X jako największy wymiar podrozmaitości zawartej w X.

Umiejętność przedstawianie zbioru semialgebraicznego w postaci skończonej sumy rodziny zbiorów postaci $\mathcal{B}$ oraz $\mathcal{G}$ w twierdzeniu 6 jest kluczowe w dalszych badaniach zbiorów semialgebraicznych. Prowadzi na przykład do triangulacji zbiorów semialgebraicznych [1], która jest najprostszym rodzajem stratyfikacji tych zbiorów. Wykorzystując istnienie triangulacji zbioru semialgebraicznego można prosto udowodnić lemat o wyborze krzywej [1]. Podobne fakty zachodzą dla zbiorów semi- i sub-analitycznych [12], [13].

Literatura

[1] R. Benedetti, J. J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Hermann 1990.

[2] A. L. Cauchy, *Mémoires sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques*, Bulletin de la Société Philomatique, (1814), 95.

[3] A. L. Cauchy, *Mémoires sur la détermination du nombre des racines réelles dans les équations algébriques*, Journal de l'École Polytechniques, t. 10, (1815), 437.

[4] A. L. Cauchy, *Sur les racines imaginaires des équations*, Journal de l'École Polytechnique, t. 11, (1820), 411.

[5] C. Hermite, *Sur l'extension du théoreme de M. Sturm a un systeme d'équations simultanées*, [extrait] CRAS, t. 35, (1852), 52-54.

[6] C. Hermite, *Remarques sur le théoreme de M. Sturm*, CRAS, t. 36, (1853), 294-7.

[7] H. Hironaka, *Triangulations of algebraic sets.* Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974), pp. 165–185. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.

[8] L. Kronecker, *Sur le théoreme de Sturm*, CRAS, t. 68, (1869), 1078-82

[9] J. L. Lagrange, *Traité de la résolution des équations numériques de tous le degrés*, Chez Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris 1808.

[10] S. Lang, *Algebra*, PWN, Warszawa 1984.

[11] S. Łojasiewicz, *Ensemble semi-analytiques*, I.H.E.S. Bures-sur-Yvette, 1965.

[12] S. Łojasiewicz, *Triangulation of semi-analytic sets.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 18 1964 449–474.

[13] S. Łojasiewicz, *Stratifications et triangulations sous-analytiques.* [Subanalytic stratifications and triangulations] Geometry Seminars, 1986 (Bologna, 1986), 83–97, Univ. Stud. Bologna, Bologna, 1988.

[14] S. Łojasiewicz, *On semi-analytic and subanalytic geometry.* Panoramas of mathematics (Warsaw, 1992/1994), 89–104, Banach Center Publ., 34, Polish Acad. Sci., Warsaw, 1995.

[15] B. E. Meserve, *Inequalities of higher degree in one unknown*, Amer. J. Math. 69, (1947), 357–370.

[16] T. Mostowski, *Lipschitz equisingularity*, Dissertationes Math. 243 (1985), 46 pp.

[17] A. Parusiński, *Lipschitz properties of semi-analytic sets.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 38 (1988), no. 4, 189–213.

[18] A. Parusiński, *Lipschitz stratification of subanalytic sets*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 27 (1994), 661-696.

[19] A. Seidenberg, *A new decision method for elementary algebra*, Ann. of Math. (2) 60, (1954), 365–374.

[20] J. C. F. Sturm, *Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques*, Bull. Sci. Math. Ferussac 11 (1829), 419–422.

[21] J. C. F. Sturm, *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, Mém. Acad. Roy. Sci. Inst. France. Sci. Math. Phys. (2) 6, (1835), 271–318.

[22] A. Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, RAND Corporation, Santa Monica, Calif., 1948. iii+60 pp.

[23] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, 2nd ed. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., 1951. iii+63 pp.

On systems of polynomial equations and inequalities

Summary. We explain the Sturm method and its meaning in semi-algebraic geometry. Exactly we deal with the following topics:

1. Sturm Theorem.
2. Semi-algebraic sets.
3. Tarski-Seidenberg Theorem.
4. R. Thom Lemma. Normal decomposition.

Łódź, 8 – 12 stycznia 2007 r.