MATERIAŁY XV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z ANALIZY I GEOMETRII ZESPOLONEJ

1994 Łódź str. 75

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA WEWNĘTRZNA FUNKCJI α-KĄTOWO GWIAŹDZISTYCH I ICH UOGÓLNIEŃ

J. Stankiewicz, Z. Stankiewicz (Rzeszów)

Funkcja f holomorficzna i jednolistna w kole $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ nazywana jest funkcją mocno gwiaździstą rzędu α lub inaczej α-kątowo gwiaździstą, $0 < \alpha \le 1$, jeżeli jest unormowana

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1 \tag{1}$$

i spełnia warunek

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \alpha\pi/2, \qquad z \in \Delta, \quad (\arg 1 = 0). \tag{2}$$

Zbiór tych funkcji oznaczmy przez $S^*(\alpha)$.

Klasa ta wprowadzona została przez D.A. Brannana i W.E. Kirwana [1] oraz niezależnie przez J. Stankiewicza [7]. W [7] klasę $S^*(\alpha)$ nazwano klasą funkcji α-kątowo gwiaździstych.

Brannan i Kirwan ([1]) otrzymali pewien geometryczny warunek, nazywany δ-widzialnością, który był warunkiem wystarczającym na to, żeby funkcja f należała do klasy $S^*(\alpha)$. Dokładniej mówiąc, wykazali oni, że jeżeli funkcja f holomorficzna i jednolistna w Δ, unormowana warunkami (1) jest taka, że dla każdego $r \in (0,1)$ i każdego punktu $w \in f(C_r)$, $C_r = \{z : |z| = r\}$, $\Delta_r = \{z : |z| < r\}$, mamy $\Delta(w, \delta(r)) \subset f(\Delta_r)$, to $f \in S^*(\alpha)$. Zbiór $\Delta(w, \delta(r))$

jest otoczką wypukłą sumy mnogościowej okręgu $C_{\delta(r)}$ i dwóch odcinków linii stycznych do okręgu $C_{\delta(r)}$ wychodzących z punktu w, gdzie

$$\delta(r) = \cos(\alpha\pi/2)\max\{|f(z)| : z \in C_r\}. \tag{3}$$

J. Stankiewicz ([7], [8]) daje geometryczną charakteryzację funkcji klasy $S^*(\alpha)$, która mówi, że funkcja f holomorficzna, jednolistna i unormowana warunkami (1) należy do klasy $S^*(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt w nie należący do $f(\varDelta)$ jest wierzchołkiem pewnego kąta o rozwartości $(1-\alpha)\pi$, którego przedłużenie dwusiecznej przechodzi przez początek układu, leżącego całkowicie w zewnętrzu obszaru $f(\varDelta)$.

Interpretacja z [7], [8] jest tzw. interpretacją zewnętrzną będącą uogólnieniem interpretacji zewnętrznej dla funkcji gwiaździstych. Interpretacja Brannana i Kirwana jest interpretacją wewnętrzną, ale nie jest ona zbyt dobra, bo zależy od argumentu z danej funkcji i nie jest rozszerzeniem interpretacji wewnętrznej dla funkcji gwiaździstych.

Klasa $S^*(1) = S^*$ jest dobrze znaną klasą funkcji gwiaździstych, dla których znana jest interpretacja zewnętrzna jak też interpretacja wewnętrzna.

Jak wiadomo funkcja f holomorficzna i jednolistna w $\varDelta$ unormowana warunkami (1) należy do klasy S^* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $w \in f(\varDelta)$ należy do obszaru $f(\varDelta)$ odcinek łączący punkt w z początkiem układu współrzędnych:

$$w \in f(\varDelta) \Rightarrow \forall_{t\in\langle 0,1\rangle} tw \in f(\varDelta). \tag{4}$$

W. Ma i D. Minda ([5]) podali pewną interpretację wewnętrzną dla klasy $S^*(\alpha)$. jest ona podobna do odpowiedniej interpretacji wewnętrznej dla klasy S^*, w której odcinek zastąpiono pewną soczewką kołową. Przytoczymy ten rezultat.

Niech E_α będzie soczewką kołową, symetryczną względem osi rzeczywistej, powstałą jako część wspólna dwóch kół domkniętych, których brzegi (okręgi ograniczjące) przecinają się w punktach 0 oraz 1 pod kątem $(1-\alpha)\pi$. W przypadku $\alpha = 1$ soczewka ta redukuje się do odcinka $\langle 0, 1\rangle$.

Dla danego $w \in \mathbb{C}$ i danego zbioru $\mathbb{D} \in \mathbb{C}$ połóżmy

$$w\mathbb{D} := \{w\eta : \eta \in \mathbb{D}\},$$

a w szczególności

$$wE_\alpha := \{w\eta : \eta \in E_\alpha\}.$$

Twierdzenie A ([5]). *Funkcja f holomorficzna i jednolistna w $\varDelta$ oraz unormowana warunkami (1) należy do klasy $S^*(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_w\{w \in f(\varDelta) \Rightarrow wE_\alpha \subseteq f(\varDelta)\}. \tag{5}$$

Innymi słowy, jeżeli wraz z każdym punktem w obszaru $f(\varDelta)$ w obszarze tym leży soczewka kołowa symetryczna o wierzchołkach 0 oraz w i rozwartości $(1-\alpha)\pi$.

W pracach [7], [8] podana jest jeszcze inna geometryczna interpretacja dla klasy $S^*(\alpha)$. W interpretacji tej kąty zwykłe prostoliniowe zostają zastąpione przez tak zwane kąty spiralne, to jest takie, w których ramionami są łuki spiral logarytmicznych.

Niech Q_α będzie (kątem spiralnym) zewnętrzem obszaru ograniczonego łukami L_α i $L_{-\alpha}$ spiral logarytmicznych wychodzących z punktu $w = 1$ o kątach stromości równych odpowiednio $(1-\alpha)\pi/2$ oraz $-(1-\alpha)\pi/2$.

Obszar $\mathbb{C}\backslash\bar{Q}_\alpha$ $(\alpha < 1)$ jest obszarem ograniczonym łukami odpowiednich spiral logarytmicznych łączących punkt $w = 1$ z punktem $w = -\exp\{\pi \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)\}$.

Podobnie przez G_α oznaczmy obszar ograniczony łukami tych samych spiral logarytmicznych, ale łączących punkt $w = 1$ z punktem $w = -\exp\{-\pi \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)\}$.

Ta inna interpretacja może być zadana następująco:

Twierdzenie B ([5])**.** *Funkcja f holomorficzna i jednolistna w $\varDelta$ oraz unormowana warunkami (1) należy do klasy $S^*(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_w\{w \in \mathbb{C}\backslash f(\varDelta) \Rightarrow wQ_\alpha \subseteq \mathbb{C}\backslash f(\varDelta)\}. \tag{6}$$

Przytoczone tu Twierdzenie A jest przeniesieniem do wnętrza interpretacji geometrycznej zewnętrznej ([7]) o osiąganiu kątami zwykłymi. Możliwe jest przeniesienie do wnętrza interpretacji zewnętrznej danej przez Twierdzenie B. Należy w tym celu soczewki kątowe E_α zastąpić "soczewkami spiralnymi" G_α.

Twierdzenie 1. *Funkcja f holomorficzna i jednolistna w $\varDelta$ oraz unormowana warunkami (1) należy do klasy $S^*(\alpha)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_w\{w \in f(\varDelta) \Rightarrow wG_\alpha \subseteq f(\varDelta)\}. \tag{7}$$

Dowód. Dla dowodu wystarczalności warunku (7) wystarczy zauważyć, że $E_\alpha \subseteq G_\alpha$.

Dowód w drugą stronę (konieczności warunku (7)) wynika z faktu, że każda funkcja klasy S_α należy do klasy $\check{S}_\beta$ przy każdym β, $|\beta| \le (1-\alpha)\pi/2$, gdzie $\check{S}_\beta$ jest dobrze znaną klasą funkcji β-spiralnych wprowadzoną przez L. Špačka ([6]). Funkcje te mają następującą interpretację geometryczną: obszar $f(\varDelta)$ ma z każdą spiralą logarytmiczną o kącie stromości β, jako część wspólną zbiór spójny (jeden łuk spójny spirali ograniczony lub nieograniczony). Innymi słowy, poruszając się po takiej spirali w jednym z możliwych kierunków, jeśli wyjdziemy ze zbioru $f(\varDelta)$, to już do niego nie wrócimy i odwrotnie, jeżeli wejdziemy do zbioru $f(\varDelta)$, to już go nie opuszczamy.

Zbiór wG_α jest częścią wspólną wszystkich łuków spiral wychodzących z punktu w i dążących do początku układu o stromościach β takich, że $|\beta| \le (1-\alpha)\pi/2$.

Dla pełności dowodu wystarczy więc zauważyć, że

$$S^*(\alpha) = \check{S}_{(1-\alpha)\pi/2} \cap \check{S}_{-(1-\alpha)\pi/2} = \bigcap_{|\beta|\le(1-\alpha)\pi/2} \check{S}_\beta. \tag{8}$$

Interpretacja ta daje się przenieść prosto na klasy $S^*(\alpha,\beta)$ funkcji (α,β)-kątowo gwiaździstych wprowadzonych i badanych w pracach [3] i [4]. Klasy te są definiowane warunkami analitycznymi:

$$\beta\pi/2 < \arg\frac{zf'(z)}{f(z)} < \alpha\pi/2, \qquad z \in \varDelta. \tag{9}$$

SPIS LITERATURY

1. D.A. Brannan, J.G. Clunie and W.E. Kirwan, *Coefficient estimates for a class of starlike functions*, Can. J. Math. **22** (1985), no. 3, 476–485.
2. D.A. Brannan and W.E. Kirwan, *On some classes of bounded univalent functions*, J. London Math. Soc. **1** (1969), no. 2, 431–443.
3. Cz. Bucka and K. Ciozda, *On a new subclass of the class S*, Ann. Polon. Math. **28** (1973), 151–161.
4. ———, *Sur l'interpretation géometrique de certaines sous-classes de la classe S*, Ann. UMCS, Sectio A **29** (1975), 23–28.
5. W. Ma and D. Minda, *An interval geometric characterization of strongly starlike functions*, ibid. (to appear).
6. L. Špaček, *Prispevek k teorii funkci prostych*, Časoppis. Pest. Math. **62** (1933), 12–19.
7. J. Stankiewicz, *Quelques problèmes extremaux dans les classes des fonctions α-angulairement étoilées*, Ann. UMCS, Sectio A **20** (1966), 59–75.
8. ———, *Some remarks concerning starlike functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. **18** (1970), 143–146.
9. ———, *On a family concerning starlike functions*, Ann. UMCS, Sectio A **22–24** (1968-70), 175–181.

Internal geometrical interpretation of α-angular starlike functions and their generalization

Summary. A function f holomorphic and univalent in the disc $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ is called an α-angular starlike function, $0 < \alpha \leq 1$, if $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ and

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \frac{\alpha\pi}{2}, \qquad z \in \Delta.$$

The set of these functions is denoted by $S^*(\alpha)$. In the article we give various kinds of the geometrical characterizations of functions of the class $S^*(\alpha)$. We also postulate the possibility of carrying some interpretations over to the classes $S^*(\alpha, \beta)$ of functions defined by the analytic conditions

$$\frac{\beta\pi}{2} < \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} < \frac{\alpha\pi}{2}, \qquad z \in \Delta.$$

Bronisławów, 13–17 stycznia, 1992 r.