**MATERIAŁY XX KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

1999 Łódź str. 31

DOMKNIĘCIE STOŻKA DYWIZORÓW SZEROKICH NA POWIERZCHNIACH

Tomasz Szemberg (Kraków)

1 Wstęp

Niech X będzie minimalną powierzchnią algebraiczną i niech $\mathrm{NA}(X)$ oznacza stożek dywizorów szerokich na X. Ten stożek jest otwarty. Jego domknięciem jest stożek $\mathrm{Nef}(X)$ składający się z dywizorów numerycznie efektywnych D (*nef*) tj. takich, że $D.C \geq 0$ dla każdej krzywej $C \subset X$.

Przypomnijmy, że zgodnie z kryterium Nakai-Moishezona dywizor $D \subset X$ jest szeroki wtedy i tylko wtedy, gdy $D^2 > 0$ i $D.C > 0$ dla każdej krzywej $C \subset X$. Zatem na brzegu domknięcia stożka dywizorów szerokich $B(X) = Nef(X) \backslash NA(X)$ możemy w naturalny sposób wyróżnić trzy rozłączne klasy.

T1 $= \{B \in B(X)$ takie, że $B^2 = 0$ i istnieje krzywa $C \subset X$ taka, że $B.C = 0\}$,

T2 $= \{B \in B(X)$ takie, że $B^2 = 0$ i $B.C > 0$ dla wszystkich krzywych $C\}$,

T3 $= \{B \in B(X)$ takie, że $B^2 > 0$ i istnieje krzywa $C \subset X$ taka, że $B.C = 0\}$.

Oczywiście w klasie T1 zawsze zawarty jest dywizor zerowy, celowe jest zatem rozważanie klasy T1* zawierającej nietrywialne dywizory typu T1.

W tej pracy badamy istnienie dywizorów poszczególnych typów na różnych typach powierzchni. Motywacją była praca [5], w której wykazano, że dywizory typu

praca wykonana w ramach grantu KBN nr. 2 P03A 061 08

T2 nie istnieją na powierzchniach o wymiarze Kodairy 0. Uzyskaną klasyfikację ilustruje następująca tabela ("+" oznacza istnienie).

powierzchnia	T1*	T2	T3
$\mathbb{P}^2$	$-$	$-$	$-$
prostokreślna	$+$	$+$	$+$
abelowa	$+$	$-$	$-$
K3	$+$	$-$	$+$
Enriquesa	$+$	$-$	$+$
hipereliptyczna	$+$	$-$	$-$
eliptyczna	$+$	$+$	$+$
ogólnego typu	$+$	$+$	$+$

W sytuacji trójwymiarowej podobny problem badał Serrano [6], korzysta on jednak ze znacznie bardziej zaawansowanych metod.

2 Przygotowanie

Zacznijmy od następującego łatwego ale użytecznego faktu.

Lemat 1 *Niech $B \in B(X)$ będzie dywizorem typu T2. Wtedy ani B ani $-B$ nie może być efektywny.*

Dowód. Gdyby było inaczej mielibyśmy natychmiast $B^2 \neq 0$, sprzeczność. ■

Przykład 2 (Mumford) Niech C będzie gładką krzywą o genusie $g \geq 2$ i niech E będzie stabilną wiązką wektorową rzędu 2 na C taką, że $\deg c_1(E) = 0$ (unormowanie) i taką, że wszystkie jej potęgi symetryczne są stabilne. Niech $X = \mathbb{P}(E)$ oznacza powierzchnię kreślną zadaną przez E. Niech $p : X \longrightarrow C$ będzie projekcją. Wiązkę tautologiczną na X oznaczamy jak zwykle $\mathcal{O}_X(1)$. W szczególności mamy $\mathcal{O}_X(1) \mid F \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ dla każdego włókna F projekcji p. Niech $D \in |\mathcal{O}_X(1)|$ będzie ustalonym dywizorem. Wtedy D jest typu T2, [2, I.10.6].

Do konstrukcji kolejnych przykładów potrzebować będziemy jeszcze kilku własności powierzchni X zdefiniowanej powyżej. Krzywe na X modulo numeryczna równoważność tworzą grupę $\mathrm{Num}(X) = \mathbb{Z}D \oplus \mathbb{Z}F$, gdzie F oznacza klasę włókna projekcji p. Przecięcie krzywych na X zdeterminowane jest przez relacje $D^2 = 0, D.F = 1, F^2 = 0$. Ponadto, jeśli krzywa $C =_{num} \alpha D + \beta F$ jest efektywna to $\beta = C.D$ jest liczbą dodatnią. Podobnie α jest nieujemna, gdyż $\alpha = C.F$ i F jest nierozkładalna oraz $F^2 = 0$. Dywizor kanoniczny $K_X = -2D + p^*K_C$, zatem $K_X =_{num} -2D + (2g-2)F$ (patrz [3, Section V.2]).

W dalszej części wykorzystamy również twierdzenie Reidera, które w tej postaci można znaleźć w [8].

Lemat 3 (Reider) *Niech L będzie szeroką wiązką liniową na gładkiej powierzchni X. Jeśli $L^2 \geq 10$ i $L.C \geq 3$ dla każdej krzywej $C \subset X$, to wiązka stowarzyszona $K_X + L$ jest bardzo szeroka.*

Lemat 4 *Przy założeniach Przykładu 2 wiązka liniowa postaci $N = 2mD + p^*R$, gdzie R jest wiązką liniową na krzywej C stopnia $2n$, jest bardzo szeroka o ile $m \geq 1$ i $n \geq g$.*

Dowód. Niech $L = 2(m+1)D + p^*(R - K_C)$. Wtedy L jest szeroka na podstawie kryterium Nakai-Moishezona i $L^2 = 8(m+1)(n-g+1) \geq 16$. Dla $C =_{num} \alpha D + \beta F$ with $\alpha \geq 0, \beta > 0$ mamy $L.C = 2(m+1)\beta + 2\alpha(n-g+1) \geq 4$. Teza wynika z Lematu 3, ponieważ $N = L + K_X$. ■

3 Powierzchnie z wymiarem Kodairy $-\infty$

Na $\mathbb{P}^2$ grupa Nerona-Severiego ma rząd 1. Stożek dywizorów szerokich jest półprostą i tylko dywizor trywialny jest w zbiorze $B(\mathbb{P}^2)$.

Stwierdzenie 5 *Istnieją minimalne powierzchnie prostokreślne zawierające dywizory z każdej z klas $T1, T2, T3$.*

Dowód. Przykład 2 jest typu T2.

Niech $\widetilde{X}$ bdzie stożkiem stopnia 2 w $\mathbb{P}^3$ i niech $\sigma : X \longrightarrow \widetilde{X}$ będzie jego minimalną rezolwentą. Wtedy X jest powierzchnią Hirzebrucha Σ_2 (patrz [1, V.4]) i dywizor wyjątkowy E odwzorowania σ spełnia warunek $E^2 = -2$. Niech F będzie transformatą właściwą prostej leżącej na $\widetilde{X}$. Wtedy $F^2 = 0$ i $E.F = 1$. W szczególności F jest dywizorem typu T1*.

Niech teraz $B = E + 2F$. Mamy $B^2 = -2 + 4 > 0$ i $B.E = -2 + 2 = 0$. Zatem B należy do klasy T3. ■

4 Powierzchnie z wymiarem Kodairy 0

Stwierdzenie 6 *Niech X będzie powierzchnią K3 lub powierzchnią Enriquesa, wtedy nie istnieje dyywizor typu T2 na X.*

Dowód. Załóżmy, że $B \in B(X)$ jest dywizorem typu $T2$. Wtedy z Lematu 1 i formuły Riemanna-Rocha mamy $-h^1(B) = \chi(X) > 0$, sprzeczność. ■

Przykład 7 Dywizor typu T3 na powierzchni K3.

Niech A będzie Jacobianem gładkiej krzywej C o genusie 2. Odwzorowanie Abela-Jacobiego jest zanurzeniem krzywej C w A i jego obraz Θ zadaje na A polaryzację typu $(1,1)$. Niech $\iota : A \ni x \longrightarrow -x \in A$ będzie kanoniczną inwolucją na A. Wtedy ι ma 16 punktów stałych $e_0, \ldots, e_{15}$ na A. Niech $Bl : \widetilde{A} \longrightarrow A$ będzie rozdmuchaniem tych punktów i niech $E_0, \ldots, E_{15}$ będą dywizorami wyjątkowymi. Niech $\widetilde{\iota} = Bl^*(\iota)$. Powierzchnia ilorazowa $\widetilde{K} = \widetilde{A}/ < \widetilde{\iota} >$ jest gładką powierzchnią Kummera powierzchni abelowej A. Niech $\widetilde{\pi}$ będzie odwzorowaniem ilorazowym

$\widetilde{\pi} : \widetilde{A} \longrightarrow \widetilde{K}$. Krzywe $D_i := \widetilde{\pi}(E_i)$ są (-2)-krzywymi na $\widetilde{K}$. Niech wreszcie $L = 2\Theta$ i $\widetilde{L} = Bl^*(L)$. Wiązka liniowa $\widetilde{L}$ zadaje morfizm $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{P}^3$, który faktoryzuje nad $\widetilde{K}$:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{A} \arrow[d, "\widetilde{\pi}"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ \widetilde{K} \arrow[r, "\psi"'] & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

Morfizm ψ zadany jest przez wiązkę liniową M na $\widetilde{K}$ która jest składnikiem prostym wiązki wektorowej $\widetilde{\pi}_*(\widetilde{L})$. Ponadto ψ jest zanurzeniem $\widetilde{K}\setminus(D_0\cup\ldots\cup D_{15})$. W szczególności wynika z tego, że $M^2 > 0$ i $M.D_i = 0$. W ten sposób otrzymujemy szukany przykład. Warto jeszcze zaznaczyć, że obraz odwzorowania ψ jest klasyczną kwartyką Kummera w $\mathbb{P}^3$ z szesnastoma punktami podwójnymi (patrz [4, 4.8 i 10.2]). Dowody i więcej przykładów tego typu znaleźć można w [7].

Przykład 8 Dywizor typu T1 na powierzchni K3.

Niech $A = E_1 \times E_2$ będzie iloczynem kartezjańskim krzywych eliptycznych. Niech X będzie gładką powierzchnią Kummera powierzchni A (jak w Przykładzie 7). Wtedy X zawiera nieskończenie wiele krzywych eliptycznych, z których każda jest dywizorem typu T1*, wynika to z tzw. adjunction formula.

W dalszym ciągu przydadzą się nam następujące fakty dotyczące powierzchni Enriquesa.

Fakt 9 *[1, VIII.17.5] Każda powierzchnia Enriquesa X posiada rozwłóknienie eliptyczne, tzn. istnieje odwzorowanie $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$, którego generycznymi włóknami są krzywe eliptyczne.*

Fakt 10 *[1, VIII.16.1] Jeśli D jest dywizorem na powierzchni Enriquesa takim, że $D^2 = -2$, to D jest efektywny (tzn. $h^0(D) > 0$).*

Fakt 11 *[1, VIII.15.1] Forma przecięcia na powierzchni Enriquesa X jest izometryczna (pomijając część związaną z torsją) z formą $H \oplus (-E_8)$. Czyli w pewnej bazie $D_1, \ldots, D_{10}$ można ją zapisać jako*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & & & \\ & & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(puste miejsca w macierzy oznaczają 0). Ponadto na generycznej powierzchni Enriquesa elementy bazy D_1, D_2 można dobrać jako włókna dwóch różnych rozwłóknień eliptycznych.

Stwierdzenie 12 *Istnieją powierzchnie Enriquesa z dywizorami typue T1* i T3.*

Dowód. Niech X będzie powierzchnią Enriquesa i niech $\pi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ będzie rozwłóknieniem eliptycznym na X. Każde gładkie włókno F odwzorowania π jest typu T1*.

Aby wskazać dywizor typu T3 załóżmy, że X jest generyczną powierzchnią Enriquesa i rozpatrzmy dywizor $B = D_1 + D_2$, gdzie D_1, D_2 są wybrane jak w Fakcie 11. Oczywiście $B^2 = 2 > 0$. Dywizory $D_3, \ldots, D_{10}$ są efektywne (Fakt 10) i spełniają $B.D_i = 0$ dla $i = 3, \ldots, 10$. Pozostaje pokazać, że B jest nef. Załóżmy, że tak nie jest tzn. istnieje krzywa C taka, że $BC < 0$. Ponieważ B i C są efektywne muszą mieć wspólne składowe a zatem $C = \alpha D_1 + \beta D_2 + C_1$, gdzie C_1 jest efektywną krzywą przecinającą B w sposób właściwy i $\alpha, \beta \geq 0$. Ale wtedy $B.C \geq 0$, sprzeczność. ■

Stwierdzenie 13 *Niech X będzie powierzchnią abelową. Wszystkie dywizory $B \in B(X)$ są typu $T1$.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $B \in B(X)$ jest typu $T2$. Z Lematu 1 wynika, że $h^0(B) = h^0(-B) = 0$. Z twierdzenia Riemanna-Rocha otrzymujemy $h^1(B) = 0$. Zatem B jest wiązką liniową na X, której wszystkie grupy kohomologii znikają. Oznacza to, że B jest nietrywialnym elementem grupy $Pic^0(X)$ (patrz [4, 3.5]). Zatem B jest numerycznie trywialny co przeczy założeniu $B.C > 0$ dla wszystkich krzywych C.

Załóżmy z kolei, że $B \in B(X)$ jest typu $T3$. Wtedy $h^0(-B) = 0$ i z twierdzenia Riemanna-Rocha wynika, że B jest efektywny.

Niech C będzie krzywą taką, że $B.C = 0$. Z twierdzenia Hodge'a o Indeksie mamy

$$B^2 \cdot C^2 \leq (B.C)^2 = 0.$$

Zatem $C^2 = 0$ i C jest krotnością $C = mC'$ pewnej krzywej eliptycznej C'. Ponieważ $B.C = 0$ i obie krzywe są efektywne mamy $B = kC'$ dla pewnej dodatniej liczby k. To przeczy założeniu $B^2 > 0$. ■

Przykład 14 Niech $X = E_1 \times E_2$ będzie produktem krzywych eliptycznych Wtedy np. E_1 jest dywizorem typu T1*.

Stwierdzenie 15 *Na powierzchniach hipereliptycznych nie istnieją dywizory typu $T2$ i $T3$.*

Dowód. Powierzchnia hipereliptyczna X jest postaci $X = (E_1 \times E_2)/G$ gdzie E_1, E_2 są krzywymi eliptycznymi a G jest grupą abelową operującą na E_1 jako grupa translacji a na E_2 w ten sposób, że $E_2/G \cong \mathbb{P}^1$ (cf. [1, V.5]). Niezmienniki takich powierzchni są dobrze opisane. W szczególności $h^2(\mathcal{O}_X) = 0$ i $h^{1,1}(X) = 2$. Ciąg wykładniczy snopów indukuje długi ciąg kohomologii

$$H^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(\mathcal{O}_X) \cong 0.$$

Zatem grupa Nerona-Severiego dla X ma rząd 2.

Niech $\pi_i : X \longrightarrow E_i/G$, dla $i = 1, 2$ będą naturalnymi rzutowaniami. Ich włókna są krotnościami krzywych eliptycznych F_1, F_2 generujących grupę $N(X)$. Dywizor $D = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ jest szeroki wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Zatem $B(X)$ składa się z dwóch półprostych generowanych przez F_1 i F_2. Oznacza to, że każdy dywizor $B \in B(X)$ jest krotnością F_1 lub F_2. Czyli jest typu T1* i żaden inny typ nie jest możliwy. ■

5 Powierzchnie eliptyczne

Przykład 16 Niech E będzie krzywą eliptyczną a C krzywą o genusie $g \geq 2$. Wtedy $X = E \times C$ jest powierzchnią eliptyczną ($K_X = pr_2^* K_C$). Każde włókno jednej z naturalnych projekcji na X jest typu T1*.

Przykład 17 Niech C będzie gładką krzywą o genusie $g \geq 2$ i niech X z rzutowaniem $p : X \longrightarrow C$ będzie powierzchnią prostokreślną jak w Przykładzie 2. Niech $D \in |\mathcal{O}_X(1)|$ będzie ustalonym dywizorem i niech R będzie wiązką liniową stopnia $2g$ na C. Z Lematu 4 wynika, że wiązka liniowa $N = 4D + p^*R$ jest bardzo szeroka. Na podstawie twierdzenia Bertiniego istnieje gładki dywizor $B \in |N|$. Niech $\pi : Y \longrightarrow X$ będzie nakryciem podwójnym rozgałęzionym nad B. Powierzchnia Y jest gładka i dla jej wiązki kanonicznej mamy

$$K_Y = \pi^*(K_X + \frac{1}{2}B) = \pi^*(p^*(K_C + R)).$$

Zatem wszystkie sekcje globalne K_Y są stałe wzdłuż włókien p (pochodzą z krzywej C) co oznacza, że $kod(Y) = 1$. Ponadto Y jest powierzchnią minimalną (nie zawiera $(-1)-$krzywych), gdyż produkt przecięcia wiązki kanonicznej z dowolną krzywą jest liczbą parzystą: $K_Y =_{num} \pi^*((4g-2)F)$ (F oznacza włókno p). Dywizor $G = \pi^* D$ jest typu T2. Istotnie, $G^2 = D^2 = 0$ i przecięcie G z dowolną krzywą jest dodatnie co wynika z formuły rzutowania (projection formula).

Przykład 18 Niech $D \in \mathbb{P}^2$ będzie gładką krzywą stopnia 4. Niech $X = D \times \mathbb{P}^1$ będzie iloczynem kartezjańskim krzywych z rzutowaniami $pr_1 : X \longrightarrow D$ and $pr_2 : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$. Rozważmy wiązkę $N = 4D + 4E$ na X (przez E oznaczamy klasę włókna pr_1). Jeśli krzywa D jest dostatecznie ogólna, na X nie ma żadnych relacji, co oznacza, że grupa Nerona-Severiego jest wolna i generowana przez D i E. Zatem krzywa $C = \alpha D + \beta E$ jest efektywna jeśli $\alpha \geq 0$ i $\beta \geq 0$. Z kryterium Nakai-Moishezona wynika, że wiązka liniowa N jest szeroka. Co więcej Lemat 3 implikuje, że jest ona bardzo szeroka tzn. zadaje zanurzenie X w pewne $\mathbb{P}^k$. System liniowy $|N|$ zawiera w szczególności dywizor B postaci 4 różne włókna pr_1 + 4 różne włókna pr_2. W szczególności B ma 16 punktów podwójnych i są to jego jedyne osobliwości. Niech $\pi : Y \longrightarrow X$ będzie nakryciem podwójnym rozgałęzionym nad B. Powierzchnia Y ma także 16 punktów podwójnych. Podobne rachunki jak w poprzednim przykładzie pokazują, że Y jest powierzchnią eliptyczną. Ponadto, ponieważ B jest dywizorem zawartym w hiperpłaszczyźnie, Y może być zanurzone w $\mathbb{P}^{k+1}$. Niech $\sigma : \widetilde{Y} \longrightarrow Y$ będzie minimalną rezolwentą osobliwości

Y. Powierzchnia $\widetilde{Y}$ zawiera 16 krzywych z samoprzecięciem -2. Dywizor $M = \sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{k+1}}(1)|Y)$ jest typu T3 ponieważ ściąga wszystkie $(-2)-$krzywe.

Podsumowując powyższe przykłady mamy

Stwierdzenie 19 *Istnieją minimalne powierzchnie eliptyczne zawierające dywizory każdego z typów T1*, T2, T3.*

6 Powierzchnie ogólnego typu

Dla powierzchni ogólnego typu mamy następujące

Stwierdzenie 20 *Istnieją minimalne powierzchnie ogólnego typu zawierające dywizory każdego z typów T1*, T2, T3.*

Przykład 21 Niech $X = C \times D$ będzie iloczynem kartezjańskim dwóch krzywych o genusie ≥ 2. Włókno każdego z rzutowań na X jest typu T1*.

Przykład 22 Niech X będzie jak w Przykładzie 2 (zachowujemy notację z Przykładu) i niech $N = 6D + p^*R$, gdzie $degR \geq 2g$. Z Lematu 4 wynika, że N jest bardzo szeroki a zatem istnieje gładki dywizor $B \in |N|$. Niech $\pi : Y \longrightarrow X$ będzie nakryciem podwójnym rozgałęzionym nad B. Analogicznie jak w Przykładzie 17 pokazujemy, że powierzchnia Y jest gładką minimalną powierzchnią ogólnego typu i $\pi^*(D)$ jest typu T2.

Przykład 23 Niech X będzie powierzchnią stopnia 5 w $\mathbb{P}^3$, której jedynymi osobliwościami są punkty podwójne. Wtedy X jest ogólnego typu i przeciągnięcie wiązki $\mathcal{O}_X(1)$ na minimalną rezolwentę X zadaje dywizor typu $T3$ (ściąga krzywe wyjątkowe nad punktami podwójnymi).

Uwagi końcowe

Wszystkie przykłady dywizorów typu T2 w tej pracy związane są z przykładem Mumforda. Również dywizory typu T3 powstają w ten sam sposób: jako przeciągnięcia bardzo szerokiej wiązki na minimalną rezolwentę osobliwści danej powierzchni. Interesujące byłoby uzyskanie istotnie innych przykładów lub wykazanie, że takie przykłady nie istnieją.

Bibliografia

[1] Barth W., Peters C., Van de Ven A., Compact Complex Surfaces, Berlin, Springer 1984

[2] Hartshorne R., Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Math. 156, Springer 1970

[3] Hartshorne R., Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer 1977

[4] Lange H. and Birkenhake Ch., Complex Abelian Varieties, Grundlehren der math. Wiss. 302, Springer 1992

[5] Lanteri A., Rondena B., Numerically positive divisors on algebraic surfaces, Geom. Dedicata 53 (1994), 145-154

[6] Serrano, F., Strictly nef divisors and Fano threefolds, J. Reine Angew. Math. 464 (1995), 187-206

[7] Szemberg T., A 4_3 configuration of lines and conics in $\mathbb{P}^5$, Ann. Pol. Math. 60, (1994), 145-158

[8] Tutaj-Gasińska, H., Twierdzenie Reidera dla zanurzeń wyższego rzędu, Materiały na XVIII Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, 87-93, Łódź 1997

Tomasz Szemberg
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński,
Reymonta 4, PL-30-059 Kraków, Poland
e-mail : szemberg@im.uj.edu.pl

On the Closure of Ample Cone

Summary

In this note we study nef non-ample divisors on algebraic surfaces. We divide them in three mutually disjoint classes and show that the existence of divisors in a given class is related to the Kodaira-Enriques classification of surfaces. In particular we construct examples of Mumford type for elliptic surfaces and surfaces of general type.

Łódź, 11 – 15 stycznia, 1999 r.