# Nierówność Łojasiewicza dla zbiorów semialgebraicznych

Anna Szlachcińska
wspólnie z Krzysztofem Kurdyką i Stanisławem Spodzieją

Uniwersytet Łódzki

Łódź 2013

Niech $X \subset \mathbb{R}^N$ będzie domkniętym zbiorem semialgebraicznym.

## Definicja

Niech $F\colon (X,0) \to (\mathbb{R}^m,0)$ będzie ciągłym odwzorowaniem semialgebraicznym, $0 \in X$. Przez *wykładnik Łojasiewicza odwzorowania $F$ na zbiorze $X$ w punkcie 0* rozumiemy najmniejszy wykładnik $\eta \in \mathbb{R}$ w nierówności

$$|F(x)| \geq C \operatorname{dist}(x, F^{-1}(0) \cap X)^\eta \quad \text{dla} \quad x \in X,$$

w otoczeniu 0 i pewnej stałej $C > 0$, i oznaczamy $\mathcal{L}_0(F|X)$.

Niech $F\colon X \to \mathbb{R}^m$ będzie ciągłym odwzorowaniem semialgebraicznym. Przez *wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności odwzorowania $F$ na zbiorze $X$* rozumiemy największy wykładnik $\nu \in \mathbb{R}$ taki, że

$$|F(x)| \geq C|x|^\nu \quad \text{dla} \quad x \in X,$$

w otoczeniu nieskończoności i pewnej stałej $C > 0$, i oznaczamy $\mathcal{L}_\infty(F|X)$.

Niech $F = (f_1, \ldots, f_m)\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym $d_j = \deg f_j$, $j = 1, \ldots, m$, $d_1 \geq \ldots \geq d_m > 0$ i niech

$$B(d_1, \ldots, d_m; k) = \begin{cases} d_1 \cdots d_m & \text{dla } \ m \leq k \\ d_1 \cdots d_{k-1} d_m & \text{dla } \ m > k. \end{cases}.$$

- J. Chądzyński (1983) udowodnił, że

$$\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{C}}(F) \geq d_2 - d_1 d_2 + \sum_{b \in F^{-1}(0)} \mu_b(F),$$

  gdzie $\mu_b(F)$ jest ktotnością $F$ w punkcie $b$, dla $N = m = 2$ i $\# F^{-1}(0) < \infty$.
- J. Kollar (1988)

$$\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{C}}(F) \geq d_m - B(d_1, \ldots, d_m; N).$$

- E. Cygan, T. Krasiński, P. Tworzewski (1999)

$$\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{C}}(F) \geq d_m - B(d_1, \ldots, d_m; N) + \sum_{b \in F^{-1}(0)} \mu_b(F),$$

  gdzie $\mu_b(F)$ jest krotnością przecięcia w sensie R. Achillesa, P. Tworzewskiego i T. Winiarskiego graph $F$ i $\mathbb{C}^n \times \{0\}$ w punkcie $(b, 0)$.

- Z. Jelonek (2006) otrzymał dla $k$-wymiarowej rozmaitości algebraicznej $V \subset \mathbb{C}^N$ stopnia $D$ następujące oszacowanie

$$\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{C}}(F|V) \geq d_m - D \cdot B(d_1, \dots, d_m; k) + \#(F^{-1}(0) \cap V),$$

gdzie $\#(F^{-1}(0) \cap V) < +\infty$.

- E. Cygan (2005) podała globalną nierówność

$$|F(x)| \geq C \left( \frac{\operatorname{dist}(x, V)}{1 + |x|^2} \right)^{B(d_1, \dots, d_m; N)} \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{C}^N$$

dla pewnej stałej $C > 0$, gdzie $V = F^{-1}(0)$. Ponadto E. Cygan udowodniła, że dla zbiorów algebraicznych zespolonych $X, Y \subset \mathbb{C}^N$ istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\operatorname{dist}(x, X) + \operatorname{dist}(x, Y) \geq C \left( \frac{\operatorname{dist}(x, X \cap Y)}{1 + |x|^2} \right)^{\deg X \cdot \deg Y} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{C}^N.$$

- Dla zbiorów algebraicznych rzeczywistych $X, Y \subset \mathbb{R}^N$ opisanych przez wielomiany stopnia co najwyżej $d$ K. Kurdyka i S. Spodzieja (2012) otrzymali

$$\operatorname{dist}(x, X) + \operatorname{dist}(x, Y) \geq C \left( \frac{\operatorname{dist}(x, X \cap Y)}{1 + |x|^2} \right)^{d(6d-3)^{N-1}} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^N \tag{\#}$$

i pewnej stałej $C > 0$.

Celem pracy jest uogólnienie powyższych wyników na przypadek zbiorów semialgebraicznych. Niech $X \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem semialgebraicznym domkniętym. Wtedy

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_k,$$

gdzie

$$X_i = \{x \in \mathbb{R}^N : g_{i,1}(x) \geq 0, \ldots, g_{i,r_i}(x) \geq 0,\ h_{i,1}(x) = \cdots = h_{i,l_i}(x) = 0\},$$

$i = 1, \ldots k$, $g_{i,1}, \ldots, g_{i,r_i}, h_{i,1}, \ldots, h_{i,l_i} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$. Przyjmijmy, że $r_i$ jest najmniejszą możliwą liczbą nierówności $g_{i,j}(x) \geq 0$ w definicji zbioru $X_i$ dla $i = 1, ..., k$.

## Definicja

Przez $r(X)$ oznaczamy najmniejszą z liczb $\max\{r_1, \ldots, r_k\}$ w powyższym przedstawieniu. Jak L. Bröcker pokazał,

$$r(X) \leq \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdots N & \text{jeśli } N \text{ jest parzysta} \\ 3 \cdot 5 \cdots N & \text{jeśli } N \text{ jest nieparzysta.} \end{cases}$$

## Definicja

Przez $\kappa(X)$ oznaczamy minimum z liczb

$$\max\{\deg g_{1,1}, \ldots, \deg g_{k,r_k}, \deg h_{1,1}, \ldots, h_{k,l_k}\}$$

dla powyższego przedstawienia, pod warunkiem, że $r_i \leq r(X)$.

Przejdźmy do otrzymanych twierdzeń.

## Twierdzenie

Niech $X, Y \subset \mathbb{R}^N$ będą domkniętymi zbiorami semialgebraicznymi i niech $0 \in X \cap Y$. Połóżmy $r = r(X) + r(Y)$ i $d = \max\{\kappa(X), \kappa(Y)\}$. Wówczas isnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}^N$ punktu 0 i dodatnia stała $C$ takie, że

$$\operatorname{dist}(x, X) + \operatorname{dist}(x, Y) \geq C \operatorname{dist}(x, X \cap Y)^{d(6d-3)^{N+r-1}} \quad \text{dla } x \in U.$$

Ponadto, jeśli 0 jest punktem izolowanym zbioru $X \cap Y$, to dla pewnego otoczenia $U \subset \mathbb{R}^N$ punktu 0 i pewnej dodatniej stałej $C$ mamy

$$\operatorname{dist}(x, X) + \operatorname{dist}(x, Y) \geq C|x|^{\frac{(2d-1)^{N+r}+1}{2}} \quad \text{dla } x \in U.$$

## Twierdzenie

Niech $X \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem algebraicznym zdefiniowanym przez układ równań wielomianowych $g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0$, gdzie $g_1, \ldots, g_r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_N]$. Niech $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym i niech $d = \max\{\deg F, \deg g_1, \ldots, \deg g_r\}$. Wówczas dla pewnej stałej $C > 0$ mamy nierówność

$$|F(x)| \geq C \left( \frac{\operatorname{dist}(x, F^{-1}(0) \cap X)}{1 + |x|^2} \right)^{d(6d-3)^{N-1}} \qquad \text{dla} \quad x \in X.$$

Ponadto, jeśli $X$ jest zbiorem nieograniczonym i $F^{-1}(0) \cap X$ jest zbiorem zwartym, to mamy

$$\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{R}}(F|X) \geq -d(6d-3)^{N-1}.$$

## Twierdzenie

Niech $X, Y \subset \mathbb{R}^N$ będą domkniętymi zbiorami semialgebraicznymi. Połóżmy $r = r(X) + r(Y)$ i $d = \max\{\kappa(X), \kappa(Y)\}$. Wówczas isnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^N$ zachodzi nierówność

$$\operatorname{dist}(x, X) + \operatorname{dist}(x, Y) \geq C \left( \frac{\operatorname{dist}(x, X \cap Y)}{1 + |x|^d} \right)^{d(6d-3)^{N+r-1}}.$$

Kluczowym faktem wykorzystywanym w dowodach powyższych twierdzeń jest nierówność (#).

## Wniosek

Niech $F : X \to \mathbb{R}^m$ będzie ciągłym odwzorowaniem semialgebraicznym, gdzie $X \subset \mathbb{R}^N$ jest domkniętym zbiorem semialgebraicznym i niech $Y = \operatorname{graph} F$. Jeśli $d = \max\{2, \kappa(X), \kappa(Y)\}$ i $r = r(X) + r(Y)$, wówczas istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$|F(x)| \geq C \left( \frac{\operatorname{dist}(x, F^{-1}(0) \cap X)}{1 + |x|^d} \right)^{d(6d-3)^{N+r-1}} \qquad \text{dla} \quad x \in X.$$

W szczególności jeśli $X$ jest zbiorem nieograniczonym i $F^{-1}(0) \cap X$ jest zbiorem zwartym, to mamy

$$\mathcal{L}_{\infty}^{\mathbb{R}}(F|X) \geq (1-d)d(6d-3)^{N+r-1}.$$