

Przestrzeń parametrów pewnych konfiguracji prostych

Justyna Szpond

Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
Instytut Matematyki

Łódź, 9-13 stycznia, 2017

Pytanie Sylwestera (1893)

Czy istnieje skończona konfiguracja prostych na rzutowej płaszczyźnie rzeczywistej, która nie posiada punktów zwyczajnych, tzn. punktów, gdzie dokładnie dwie proste się przecinają, inna niż pęk?

Pytanie Sylwestera (1893)

Czy istnieje skończona konfiguracja prostych na rzutowej płaszczyźnie rzeczywistej, która nie posiada punktów zwyczajnych, tzn. punktów, gdzie dokładnie dwie proste się przecinają, inna niż pęk?

Twierdzenie Sylwestera-Gallai (1944)

Założmy, że \mathcal{L} jest skończonym zbiorem prostych na rzutowej płaszczyźnie rzeczywistej, nie tworzącym pęku. Wtedy wśród punktów przecięcia prostych istnieje punkt zwyczajny.

Hipoteza Diraca-Motzkina

Pytanie Sylwestera (1893)

Czy istnieje skończona konfiguracja prostych na rzutowej płaszczyźnie rzeczywistej, która nie posiada punktów zwyczajnych, tzn. punktów, gdzie dokładnie dwie proste się przecinają, inna niż pęk?

Twierdzenie Sylwestera-Gallai (1944)

Założmy, że \mathcal{L} jest skończonym zbiorem prostych na rzutowej płaszczyźnie rzeczywistej, nie tworzącym pęku. Wtedy wśród punktów przecięcia prostych istnieje punkt zwyczajny.

Hipoteza Diraca-Motzkina (1951)

Założmy, że \mathcal{L} jest zbiorem d prostych na płaszczyźnie rzeczywistej, nie tworzącym pęku. Założmy, że $d \geq d_0$ dla dostatecznie dużej stałej d_0 . Wtedy istnieje co najmniej $\frac{d}{2}$ punktów zwyczajnych wśród punktów osobliwych konfiguracji \mathcal{L} .

Twierdzenie Greena-Tao (2013)

Hipoteza Diraca-Motzkina zachodzi dla dostatecznie dużej liczby prostych.

Dowód Hipotezy Diraca-Motzkina

Twierdzenie Greena-Tao (2013)

Hipoteza Diraca-Motzkina zachodzi dla dostatecznie dużej liczby prostych.

Wniosek 1

Określenie "dostatecznie dużej" w tym przypadku oznacza co najmniej 100 000, ale przypuszcza się, że wystarczy 19.

Dowód Hipotezy Diraca-Motzkina

Twierdzenie Greena-Tao (2013)

Hipoteza Diraca-Motzkina zachodzi dla dostatecznie dużej liczby prostych.

Wniosek 1

Określenie "dostatecznie dużej" w tym przypadku oznacza co najmniej 100 000, ale przypuszcza się, że wystarczy 19.

Wniosek 2

Ograniczenie na liczbę punktów zwyczajnych nie może być poprawione w ogólności, co wynika z serii przykładów skonstruowanych przez Böröczky'ego około 1960 roku.

Przykład Böröczky'ego

Niech $P(0)$ będzie ustalonym punktem na okręgu \mathcal{C} o środku w punkcie C . Dla każdej liczby rzeczywistej α , niech $P(\alpha)$ będzie punktem otrzymanym przez obrót punktu $P(0)$ wokół C , o kąt α .

Przykład Böröczky'ego

Niech $P(0)$ będzie ustalonym punktem na okręgu \mathcal{C} o środku w punkcie C . Dla każdej liczby rzeczywistej α , niech $P(\alpha)$ będzie punktem otrzymanym przez obrót punktu $P(0)$ wokół C , o kąt α .

Oznaczmy przez $L(\alpha)$ prostą $P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$.

Przykład Böröczky'ego

Niech $P(0)$ będzie ustalonym punktem na okręgu \mathcal{C} o środku w punkcie C . Dla każdej liczby rzeczywistej α , niech $P(\alpha)$ będzie punktem otrzymanym przez obrót punktu $P(0)$ wokół C , o kąt α .

Oznaczmy przez $L(\alpha)$ prostą $P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$.

W przypadku, gdy $\alpha \equiv \pi - 2\alpha \pmod{2\pi}$, prosta $L(\alpha)$ jest styczną do \mathcal{C} w punkcie $P(\alpha)$.

Przykład Bőroczky'ego

Niech $P(0)$ będie ustalonym punktem na okręgu \mathcal{C} o Źrodku w punkcie C . Dla kaŹdej liczby rzeczywistej α , niech $P(\alpha)$ będie punktem otrzymanym przez obrót punktu $P(0)$ wokół C , o kąt α .

Oznaczmy przez $L(\alpha)$ prostą $P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$.

W przypadku, gdy $\alpha \equiv \pi - 2\alpha \pmod{2\pi}$, prosta $L(\alpha)$ jest styczną do \mathcal{C} w punkcie $P(\alpha)$.

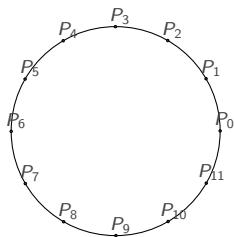
Przykład 1

Dla $n \geq 3$, definiujemy zbiór

$$\mathcal{B}_n = \left\{ L\left(2k\pi/n\right) : k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}

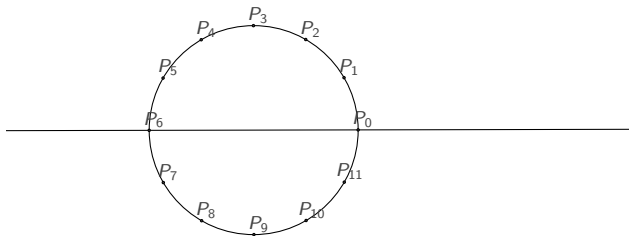
$$L(\alpha) = P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$$



Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}

$$L(\alpha) = P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$$

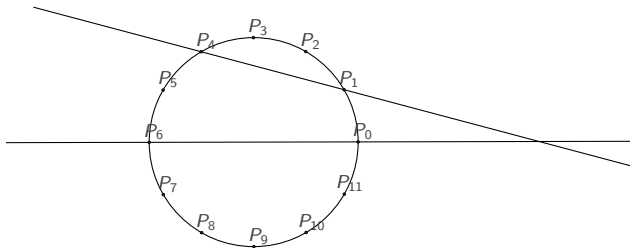
$$\alpha = 0$$



Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}

$$L(\alpha) = P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$$

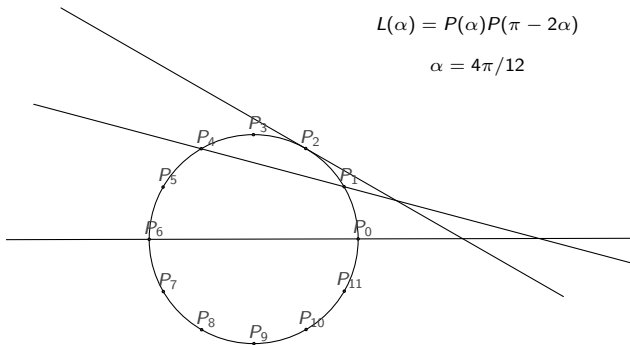
$$\alpha = 2\pi/12$$



Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}

$$L(\alpha) = P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$$

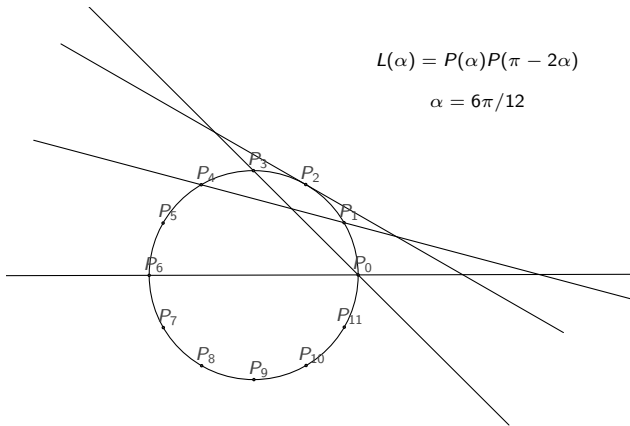
$$\alpha = 4\pi/12$$



Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}

$$L(\alpha) = P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$$

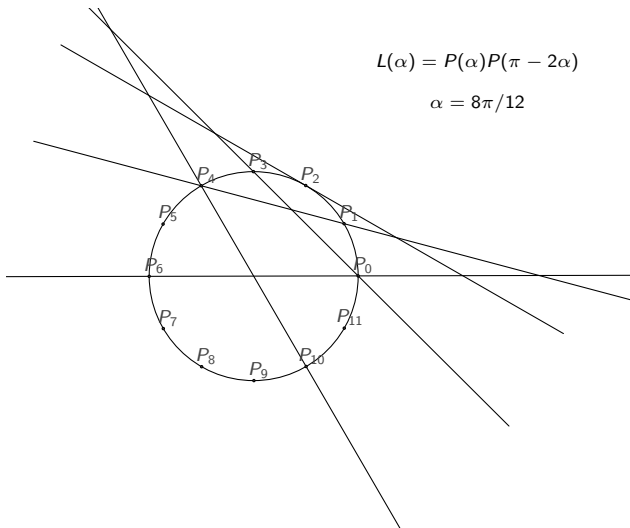
$$\alpha = 6\pi/12$$



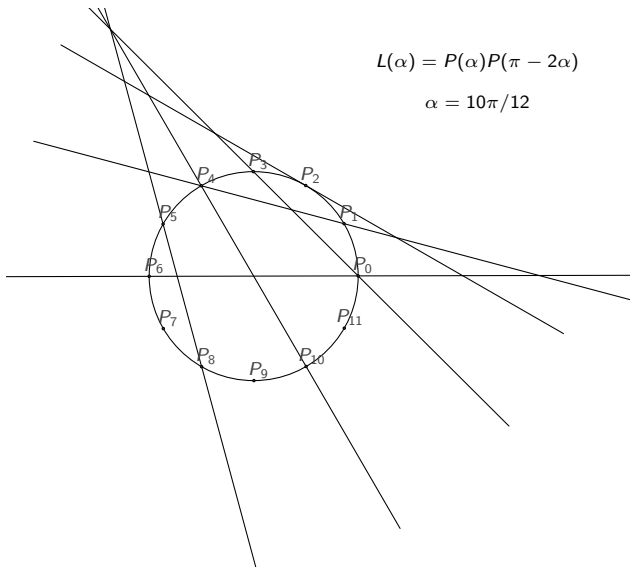
Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}

$$L(\alpha) = P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$$

$$\alpha = 8\pi/12$$



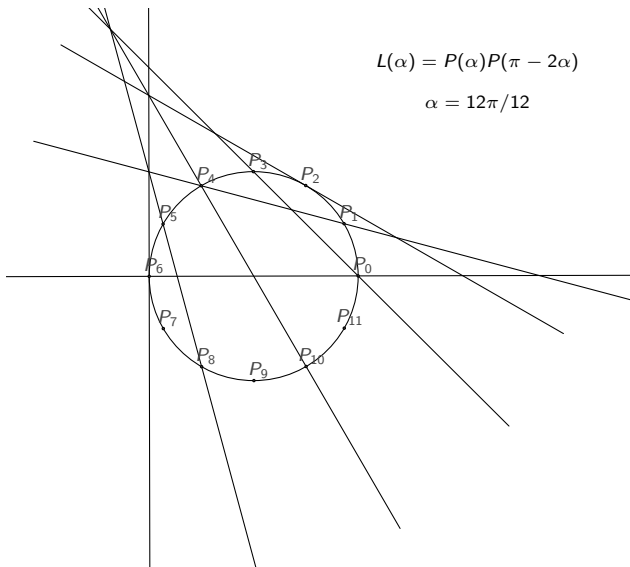
Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}



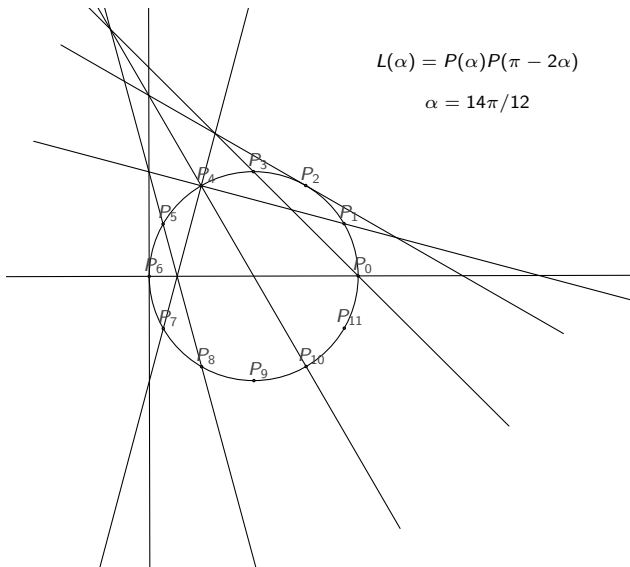
$$L(\alpha) = P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$$

$$\alpha = 10\pi/12$$

Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}



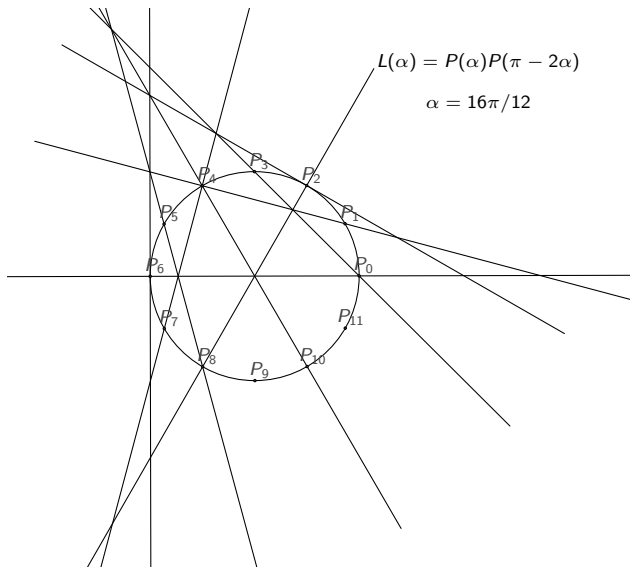
Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}



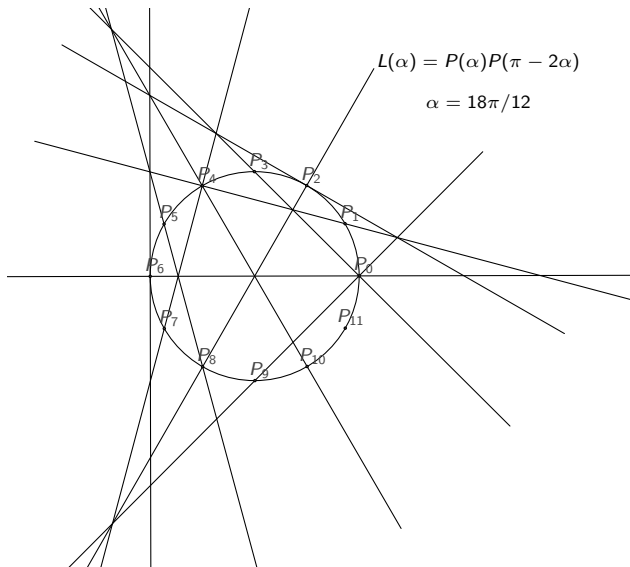
$$L(\alpha) = P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$$

$$\alpha = 14\pi/12$$

Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}



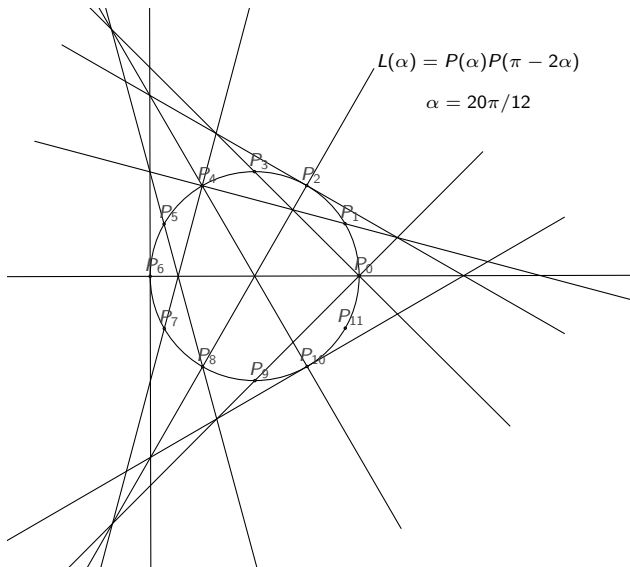
Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}



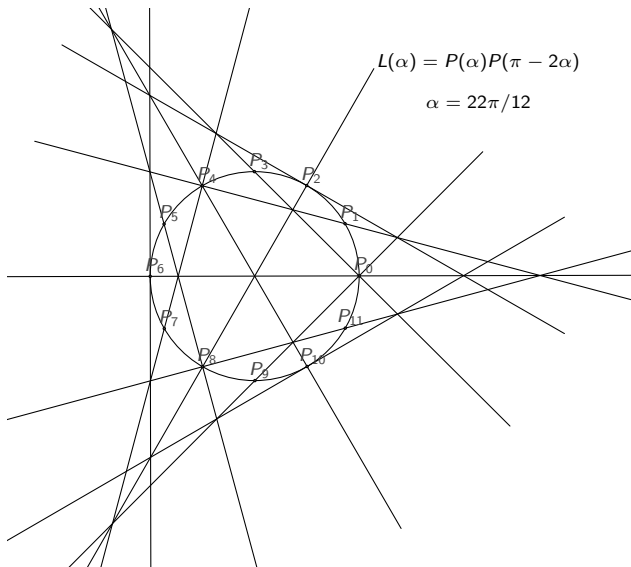
$$L(\alpha) = P(\alpha)P(\pi - 2\alpha)$$

$$\alpha = 18\pi/12$$

Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}



Konfiguracja Böröczky'ego \mathcal{B}_{12}



Definicja 1 (Potęga symboliczna)

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1 i niech $I \subset R$ będzie ideałem. Niech m będzie liczbą naturalną. Ideał

$$I^{(m)} = \bigcap_{P \in \text{Ass}(I)} (I^m R_P \cap R),$$

gdzie $\text{Ass}(I)$ jest zbiorem stowarzyszonych ideałów pierwszych ideału I , nazywamy m -tą potęgą symboliczną ideału I .

Definicja 1 (Potęga symboliczna)

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1 i niech $I \subset R$ będzie ideałem. Niech m będzie liczbą naturalną. Ideał

$$I^{(m)} = \bigcap_{P \in \text{Ass}(I)} (I^m R_P \cap R),$$

gdzie $\text{Ass}(I)$ jest zbiorem stowarzyszonych ideałów pierwszych ideału I , nazywamy m -tą potęgą symboliczną ideału I .

Problem 1 (Problem zawierania)

Zdecydować dla jakich m i r jest zachodzi

$$I^{(m)} \subset I^r.$$

Twierdzenie 1 (Ein-Lazarsfeld-Smith, Hochster-Huneke (2001))

Niech $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$ będzie ideałem jednorodnym. Wtedy zawieranie

$$I^{(m)} \subset I^r$$

zachodzi dla wszystkich $m \geq Nr$.

Twierdzenie 1 (Ein-Lazarsfeld-Smith, Hochster-Huneke (2001))

Niech $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$ będzie ideałem jednorodnym. Wtedy zawieranie

$$I^{(m)} \subset I^r$$

zachodzi dla wszystkich $m \geq Nr$.

Problem 2 (Bocci, Harbourne, Huneke)

Niech I będzie wysaturowanym ideałem skończonego zbioru zredukowanych punktów w \mathbb{P}^N . Czy zawieranie

$$I^{(m)} \subset I^r$$

zachodzi dla $m \geq Nr - (N - 1)$?

Problem 3 (Huneke)

Niech I będzie wysaturowanym ideałem skończonego zbioru zredukowanych punktów w \mathbb{P}^2 . Czy zachodzi zawieranie

$$I^{(3)} \subset I^2?$$

Potęgi symboliczne ideału punktów

Niech $Z = \{P_1, \dots, P_s\}$ będzie zbiorem zredukowanych punktów w \mathbb{P}^N .

Dla ustalonego $i \in \{1, \dots, s\}$ niech $I(P_i)$ oznacza ideał wielomianów znikających w punkcie P_i .

Wtedy ideałem zbioru Z jest:

$$I(Z) = I(P_1) \cap \dots \cap I(P_s).$$

Potęga symboliczna ideału $I(Z)$ dana jest wzorem:

$$I(Z)^{(m)} = I(P_1)^m \cap \dots \cap I(P_s)^m$$

dla $m \geq 1$.

Problem [Bocci, Harbourne, Huneke]

Niech I będzie wysaturowanym ideałem skończonego zbioru zredukowanych punktów w \mathbb{P}^N . Czy zawieranie

$$I^{(m)} \subset I^r$$

zachodzi dla $m \geq Nr - (N - 1)$?

Problem [Bocci, Harbourne, Huneke]

Niech I będzie wysaturowanym ideałem skończonego zbioru zredukowanych punktów w \mathbb{P}^N . Czy zawieranie

$$I^{(m)} \subset I^r$$

zachodzi dla $m \geq Nr - (N - 1)$?

Twierdzenie 2

Zawieranie zachodzi dla

- dowolnego ideału w charakterystyce 2;
- ideału jednomianowego w dowolnej charakterystyce;
- ideału zbioru d -gwiazdzistego;
- ideału punktów ogólnych w \mathbb{P}^2 i \mathbb{P}^3 .

Pierwszy kontrprzykład (Dumnicki, Szemberg, Tutaj-Gasińska, 2013)

Przykład 2 (Dualna konfiguracja Hessego)

Niech ε będzie prymitywnym pierwiastkiem stopnia 3 z 1. Niech I będzie wysaturowanym ideałem radykalnym zbioru następujących 12 punktów w zespolonej płaszczyźnie rzutowej \mathbb{P}^2 :

$$\begin{array}{lll} P_1 = (1 : 0 : 0), & P_2 = (0 : 1 : 0), & P_3 = (0 : 0 : 1), \\ P_4 = (1 : 1 : 1), & P_5 = (1 : \varepsilon : \varepsilon^2), & P_6 = (1 : \varepsilon^2 : \varepsilon), \\ P_7 = (\varepsilon : 1 : 1), & P_8 = (1 : \varepsilon : 1), & P_9 = (1 : 1 : \varepsilon), \\ P_{10} = (\varepsilon^2 : 1 : 1), & P_{11} = (1 : \varepsilon^2 : 1), & P_{12} = (1 : 1 : \varepsilon^2). \end{array}$$

Wtedy

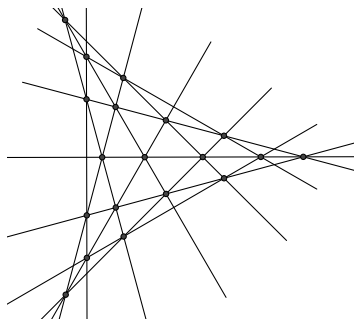
$$I^{(3)} \not\subseteq I^2.$$

Pierwszy kontrprzykład rzeczywisty

Przykład 3 (Konfiguracja Böröczy'ego)

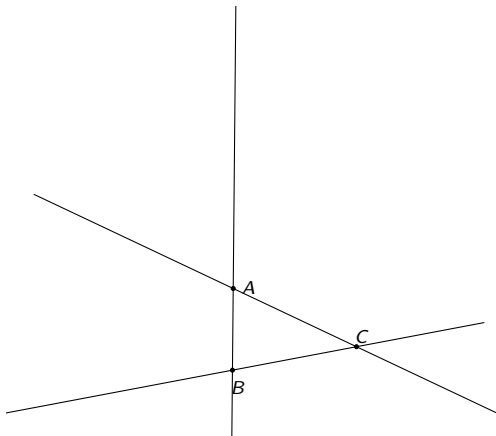
Niech Z_n będzie zbiorem wszystkich punktów potrójnych konfiguracji \mathcal{B}_n .
Poniżej przedstawiony jest rysunek dla $n = 12$. Punkty zbioru Z_{12} są
zaznaczone kropkami. Niech I będzie wysaturowanym ideałem
radykałnym zdefiniowanym przez zbiór Z_{12} . Wtedy

$$I^{(3)} \not\subseteq I^2.$$



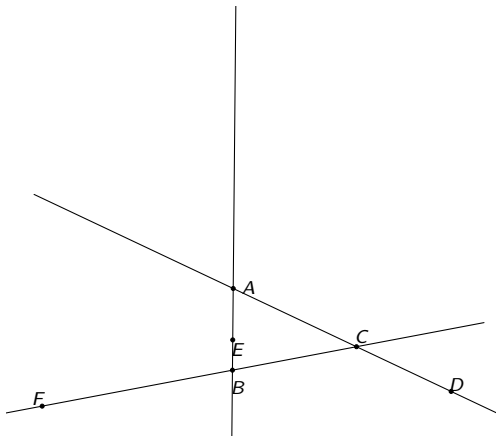
Konstrukcja geometryczna wymiernej konfiguracji \mathcal{B}_{12}

Niech A , B i C będą niewspółliniowymi punktami wymiernymi w \mathbb{P}^2 .



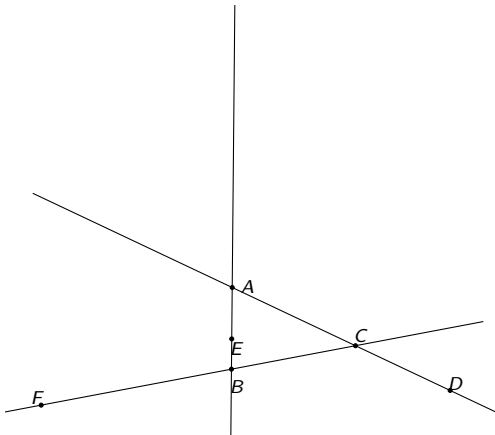
Konstrukcja geometryczna wymiernej konfiguracji \mathcal{B}_{12}

Niech A , B i C będą niewspółliniowymi punktami wymiernymi w \mathbb{P}^2 .
Niech D , E , F będą punktami na prostych AC , AB oraz BC ,
odpowiednio, różnymi od punktów A , B , C .



Konstrukcja geometryczna wymiernej konfiguracji \mathcal{B}_{12}

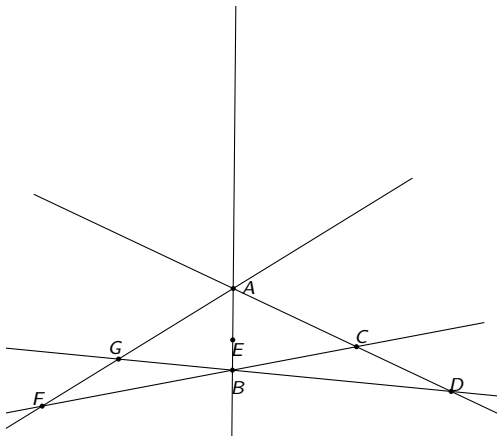
Niech A , B i C będą niewspółliniowymi punktami wymiernymi w \mathbb{P}^2 .
Niech D , E , F będą punktami na prostych AC , AB oraz BC ,
odpowiednio, różnymi od punktów A , B , C .
Następnie definiujemy punkty



Konstrukcja geometryczna wymiernej konfiguracji \mathcal{B}_{12}

Niech A , B i C będą niewspółliniowymi punktami wymiernymi w \mathbb{P}^2 .
Niech D , E , F będą punktami na prostych AC , AB oraz BC ,
odpowiednio, różnymi od punktów A , B , C .
Następnie definiujemy punkty

$$G = AF \cap BD,$$

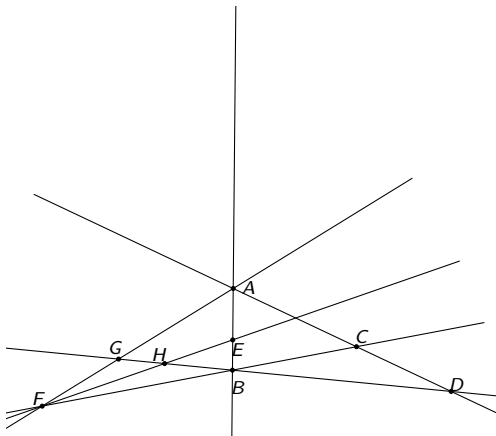


Konstrukcja geometryczna wymiernej konfiguracji \mathcal{B}_{12}

Niech A , B i C będą niewspółliniowymi punktami wymiernymi w \mathbb{P}^2 .
Niech D , E , F będą punktami na prostych AC , AB oraz BC ,
odpowiednio, różnymi od punktów A , B , C .
Następnie definiujemy punkty

$$G = AF \cap BD,$$

$$H = BD \cap EF,$$



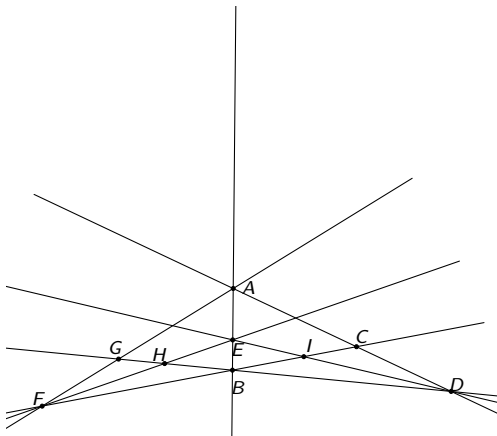
Konstrukcja geometryczna wymiernej konfiguracji \mathcal{B}_{12}

Niech A , B i C będą niewspółliniowymi punktami wymiernymi w \mathbb{P}^2 .
Niech D , E , F będą punktami na prostych AC , AB oraz BC ,
odpowiednio, różnymi od punktów A , B , C .
Następnie definiujemy punkty

$$G = AF \cap BD,$$

$$H = BD \cap EF,$$

$$I = BC \cap ED,$$



Konstrukcja geometryczna wymiernej konfiguracji \mathcal{B}_{12}

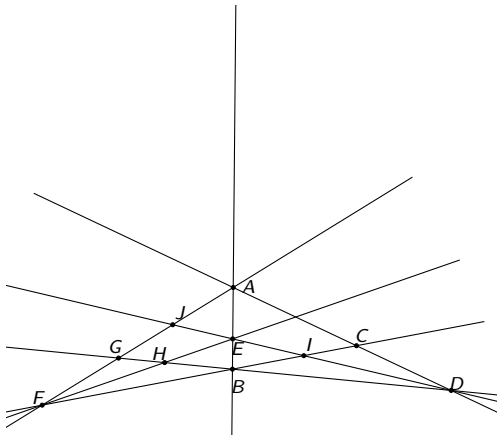
Niech A , B i C będą niewspółliniowymi punktami wymiernymi w \mathbb{P}^2 .
Niech D , E , F będą punktami na prostych AC , AB oraz BC ,
odpowiednio, różnymi od punktów A , B , C .
Następnie definiujemy punkty

$$G = AF \cap BD,$$

$$H = BD \cap EF,$$

$$I = BC \cap ED,$$

$$J = AF \cap ED,$$



Konstrukcja geometryczna wymiernej konfiguracji \mathcal{B}_{12}

Niech A , B i C będą niewspółliniowymi punktami wymiernymi w \mathbb{P}^2 .

Niech D , E , F będą punktami na prostych AC , AB oraz BC ,
odpowiednio, różnymi od punktów A , B , C .

Następnie definiujemy punkty

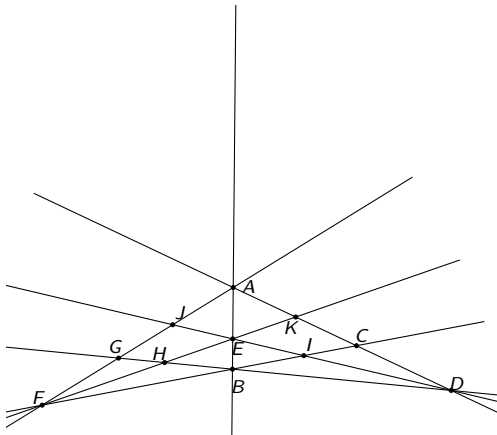
$$G = AF \cap BD,$$

$$H = BD \cap EF,$$

$$I = BC \cap ED,$$

$$J = AF \cap ED,$$

$$K = AC \cap EF,$$



Konstrukcja geometryczna wymiernej konfiguracji \mathcal{B}_{12}

Niech A , B i C będą niewspółliniowymi punktami wymiernymi w \mathbb{P}^2 .
Niech D , E , F będą punktami na prostych AC , AB oraz BC ,
odpowiednio, różnymi od punktów A , B , C .
Następnie definiujemy punkty

$$G = AF \cap BD,$$

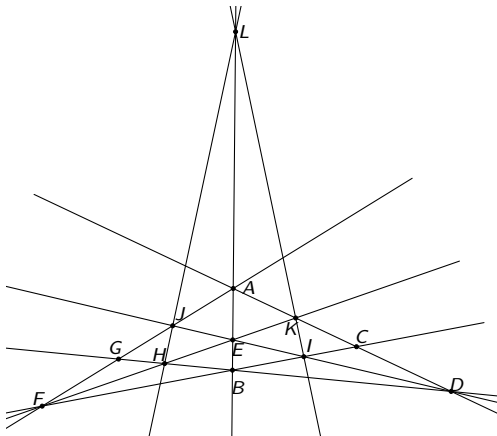
$$H = BD \cap EF,$$

$$I = BC \cap ED,$$

$$J = AF \cap ED,$$

$$K = AC \cap EF,$$

$$L = HJ \cap IK.$$



Konstrukcja geometryczna wymiernej konfiguracji B_{12}

Niech A , B i C będą niewspółliniowymi punktami wymiernymi w \mathbb{P}^2 .
Niech D , E , F będą punktami na prostych AC , AB oraz BC ,
odpowiednio, różnymi od punktów A , B , C .
Następnie definiujemy punkty

$$G = AF \cap BD,$$

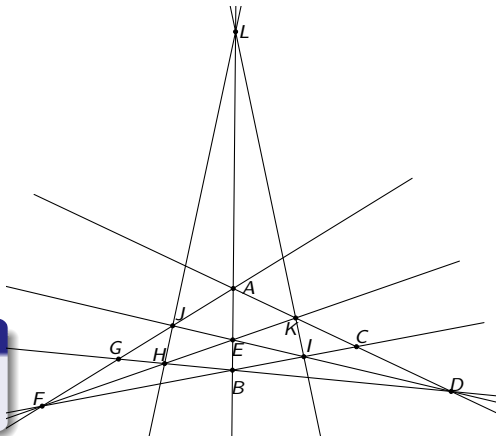
$$H = BD \cap EF,$$

$$I = BC \cap ED,$$

$$J = AF \cap ED,$$

$$K = AC \cap EF,$$

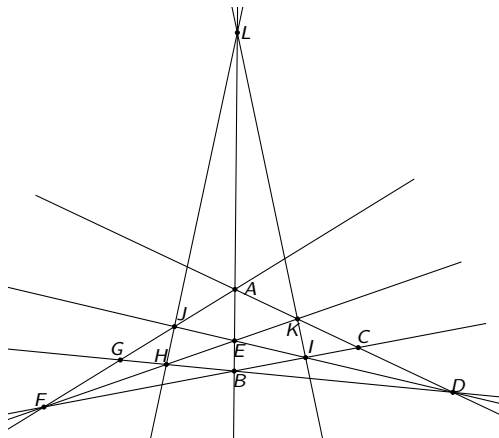
$$L = HJ \cap IK.$$



Fakt

Prosta AB przechodzi
przez punkt L .

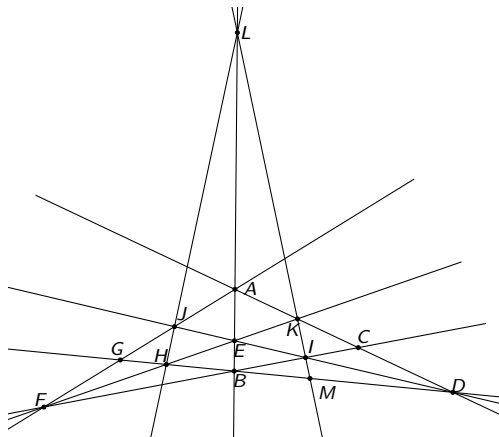
Konstrukcja geometryczna część II



Konstrukcja geometryczna część II

Definiujemy pozostałe 7 punktów:

$$M = BD \cap IK,$$

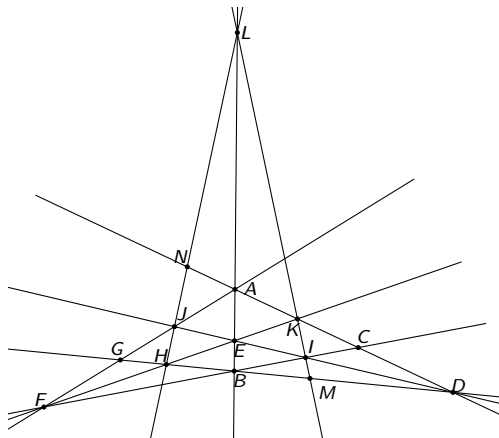


Konstrukcja geometryczna część II

Definiujemy pozostałe 7 punktów:

$$M = BD \cap IK,$$

$$N = AC \cap HJ,$$



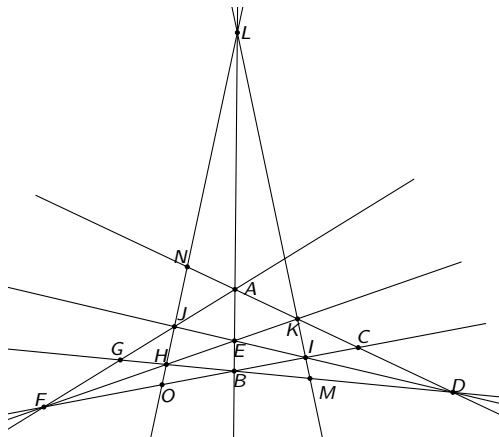
Konstrukcja geometryczna część II

Definiujemy pozostałe 7 punktów:

$$M = BD \cap IK,$$

$$N = AC \cap HJ,$$

$$O = HJ \cap BC,$$



Konstrukcja geometryczna część II

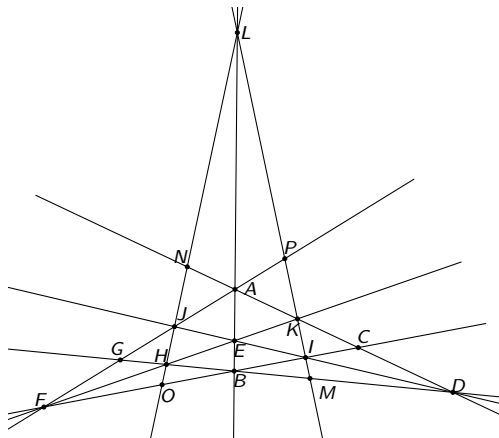
Definiujemy pozostałe 7 punktów:

$$M = BD \cap IK,$$

$$N = AC \cap HJ,$$

$$O = HJ \cap BC,$$

$$P = AF \cap IK,$$



Konstrukcja geometryczna część II

Definiujemy pozostałe 7 punktów:

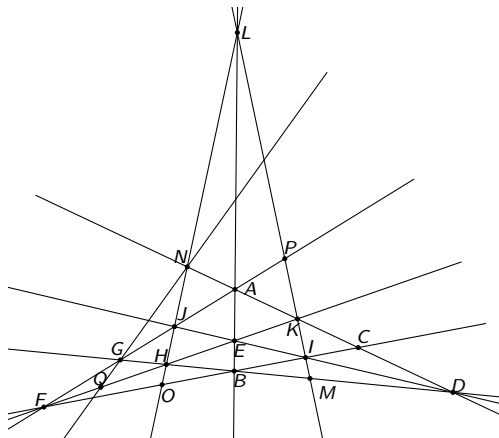
$$M = BD \cap IK,$$

$$N = AC \cap HJ,$$

$$O = HJ \cap BC,$$

$$P = AF \cap IK,$$

$$Q = EF \cap NG,$$



Konstrukcja geometryczna część II

Definiujemy pozostałe 7 punktów:

$$M = BD \cap IK,$$

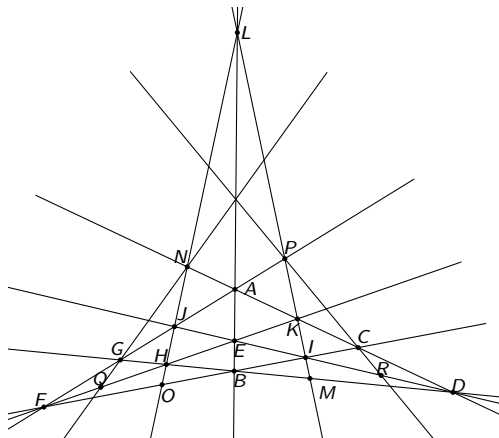
$$N = AC \cap HJ,$$

$$O = HJ \cap BC,$$

$$P = AF \cap IK,$$

$$Q = EF \cap NG,$$

$$R = DE \cap CP,$$



Konstrukcja geometryczna część II

Definiujemy pozostałe 7 punktów:

$$M = BD \cap IK,$$

$$N = AC \cap HJ,$$

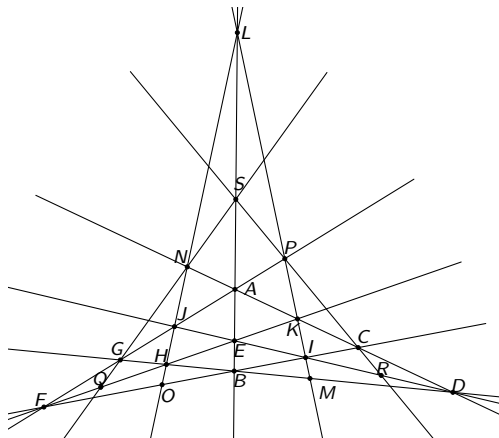
$$O = HJ \cap BC,$$

$$P = AF \cap IK,$$

$$Q = EF \cap NG,$$

$$R = DE \cap CP,$$

$$S = CP \cap NG.$$



Konstrukcja geometryczna część II

Definiujemy pozostałe 7 punktów:

$$M = BD \cap IK,$$

$$N = AC \cap HJ,$$

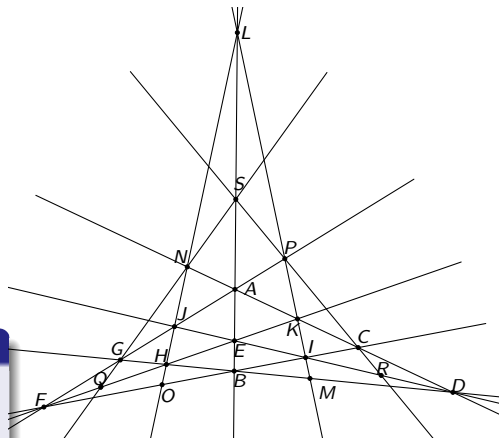
$$O = HJ \cap BC,$$

$$P = AF \cap IK,$$

$$Q = EF \cap NG,$$

$$R = DE \cap CP,$$

$$S = CP \cap NG.$$



Fakt

- 1) Prosta AB przechodzi przez punkt S .

Konstrukcja geometryczna część II

Definiujemy pozostałe 7 punktów:

$$M = BD \cap IK,$$

$$N = AC \cap HJ,$$

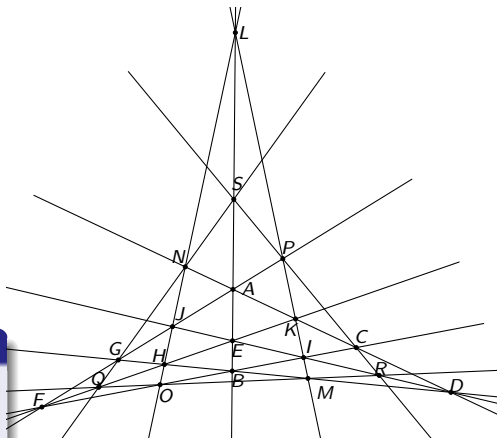
$$O = HJ \cap BC,$$

$$P = AF \cap IK,$$

$$Q = EF \cap NG,$$

$$R = DE \cap CP,$$

$$S = CP \cap NG.$$



Fakt

- 1) Prosta AB przechodzi przez punkt S .
- 2) Punkty M , O , Q oraz R są współliniowe.

1. Mając dany zbiór punktów skonstruuj wszystkie proste z konfiguracji zdeterminowane przez te punkty.

1. Mając dany zbiór punktów skonstruuj wszystkie proste z konfiguracji zdeterminowane przez te punkty.
2. Dodaj do zbioru punktów nowe punkty przecięcia prostych, **IDŹ DO 1.**

1. Mając dany zbiór punktów skonstruuj wszystkie proste z konfiguracji zdeterminowane przez te punkty.
2. Dodaj do zbioru punktów nowe punkty przecięcia prostych, **IDŹ DO 1.**
3. Jeśli w kroku 2 nie otrzymaliśmy nowych punktów a konstrukcja nie jest zakończona, wprowadź nowy punkt (i parametr), **IDŹ DO 1.**

1. Mając dany zbiór punktów skonstruuj wszystkie proste z konfiguracji zdeterminowane przez te punkty.
2. Dodaj do zbioru punktów nowe punkty przecięcia prostych, **IDŹ DO 1**.
3. Jeśli w kroku 2 nie otrzymaliśmy nowych punktów a konstrukcja nie jest zakończona, wprowadź nowy punkt (i parametr), **IDŹ DO 1**.

Algorytm startuje z 4 fundamentalnymi punktami.

$$F = [1 : 0 : 0]$$

F .

Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

$$F = [1 : 0 : 0]$$

$$D = [0 : 1 : 0],$$

F .

D

Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

$$F = [1 : 0 : 0]$$

$$D = [0 : 1 : 0],$$

$$L = [0 : 0 : 1],$$

• L

F •

D

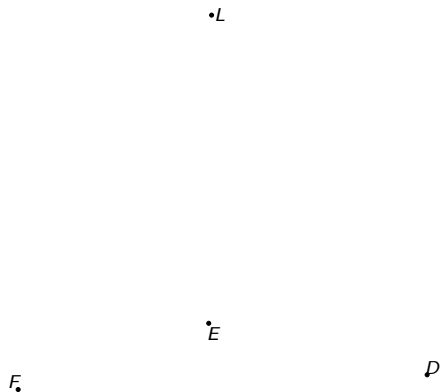
Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

$$F = [1 : 0 : 0]$$

$$D = [0 : 1 : 0],$$

$$L = [0 : 0 : 1],$$

$$E = [1 : 1 : 1],$$



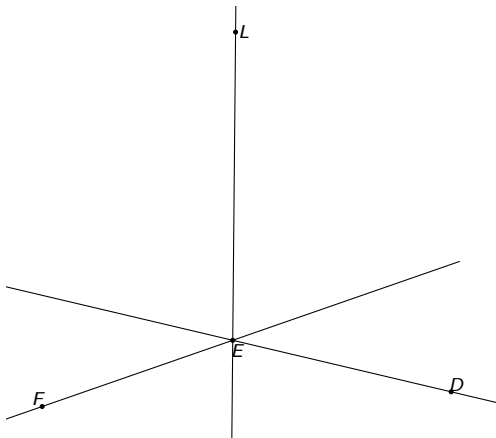
Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

$$F = [1 : 0 : 0]$$

$$D = [0 : 1 : 0],$$

$$L = [0 : 0 : 1],$$

$$E = [1 : 1 : 1],$$



Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

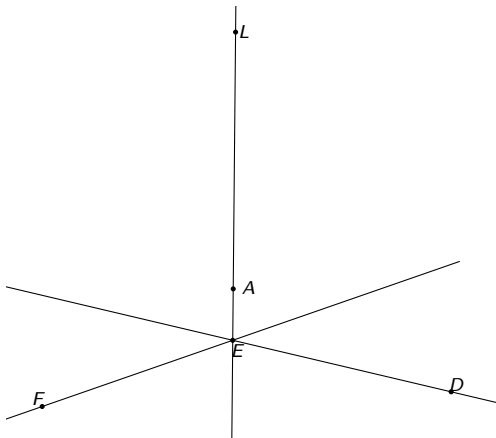
$$F = [1 : 0 : 0]$$

$$D = [0 : 1 : 0],$$

$$L = [0 : 0 : 1],$$

$$E = [1 : 1 : 1],$$

$$A = [a : a : b],$$



Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

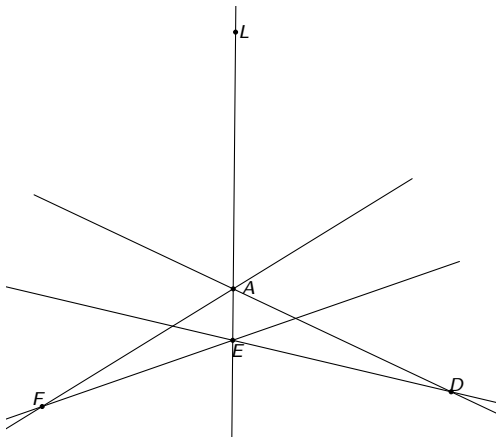
$$F = [1 : 0 : 0]$$

$$D = [0 : 1 : 0],$$

$$L = [0 : 0 : 1],$$

$$E = [1 : 1 : 1],$$

$$A = [a : a : b],$$



Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

$$F = [1 : 0 : 0]$$

$$D = [0 : 1 : 0],$$

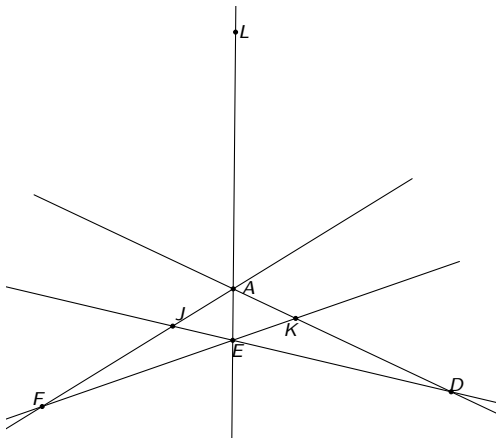
$$L = [0 : 0 : 1],$$

$$E = [1 : 1 : 1],$$

$$A = [a : a : b],$$

$$J = [b : a : b],$$

$$K = [a : b : b],$$



Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

$$F = [1 : 0 : 0]$$

$$D = [0 : 1 : 0],$$

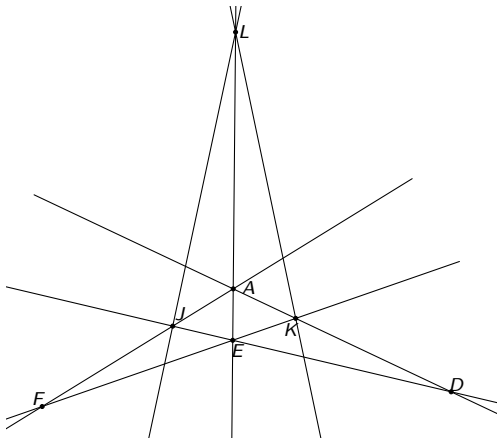
$$L = [0 : 0 : 1],$$

$$E = [1 : 1 : 1],$$

$$A = [a : a : b],$$

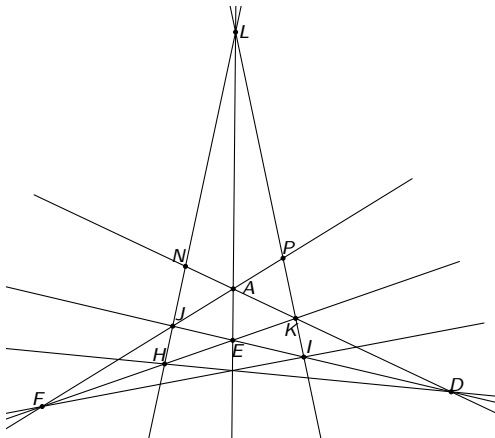
$$J = [b : a : b],$$

$$K = [a : b : b],$$



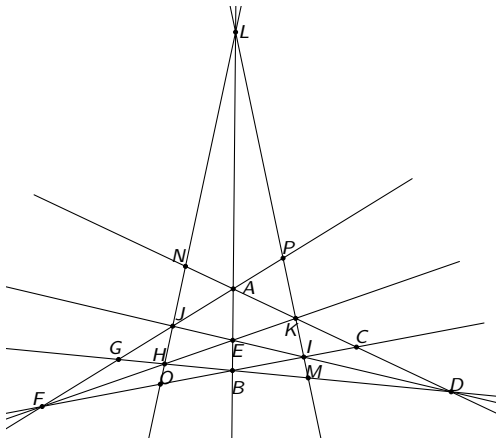
Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

$$\begin{aligned}F &= [1 : 0 : 0] \\D &= [0 : 1 : 0], \\L &= [0 : 0 : 1], \\E &= [1 : 1 : 1], \\A &= [a : a : b], \\J &= [b : a : b], \\K &= [a : b : b], \\H &= [b : a : a], \\I &= [a : b : a], \\P &= [a^2 : ab : b^2], \\N &= [ab : a^2; b^2],\end{aligned}$$



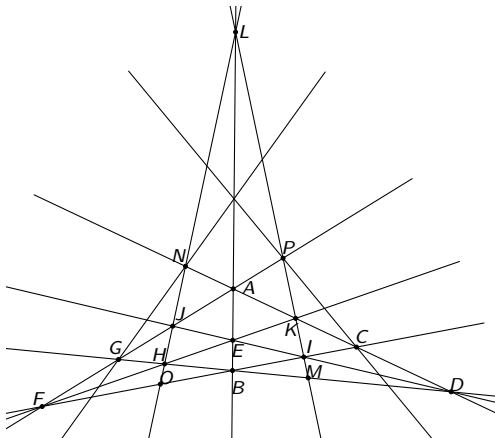
Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

$$\begin{aligned} F &= [1 : 0 : 0] \\ D &= [0 : 1 : 0], \\ L &= [0 : 0 : 1], \\ E &= [1 : 1 : 1], \\ A &= [a : a : b], \\ J &= [b : a : b], \\ K &= [a : b : b], \\ H &= [b : a : a], \\ I &= [a : b : a], \\ P &= [a^2 : ab : b^2], \\ N &= [ab : a^2 : b^2], \\ C &= [a^2 : b^2 : ab], \\ G &= [b : a^2 : ab], \\ B &= [b : b : a], \\ O &= [b^2 : ab : a^2], \\ M &= [ab : b^2 : a^2], \end{aligned}$$



Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

$$\begin{aligned} F &= [1 : 0 : 0] \\ D &= [0 : 1 : 0], \\ L &= [0 : 0 : 1], \\ E &= [1 : 1 : 1], \\ A &= [a : a : b], \\ J &= [b : a : b], \\ K &= [a : b : b], \\ H &= [b : a : a], \\ I &= [a : b : a], \\ P &= [a^2 : ab : b^2], \\ N &= [ab : a^2 : b^2], \\ C &= [a^2 : b^2 : ab], \\ G &= [b : a^2 : ab], \\ B &= [b : b : a], \\ O &= [b^2 : ab : a^2], \\ M &= [ab : b^2 : a^2], \end{aligned}$$



Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

$$F = [1 : 0 : 0]$$

$$D = [0 : 1 : 0],$$

$$L = [0 : 0 : 1],$$

$$E = [1 : 1 : 1],$$

$$A = [a : a : b],$$

$$J = [b : a : b],$$

$$K = [a : b : b],$$

$$H = [b : a : a],$$

$$I = [a : b : a],$$

$$P = [a^2 : ab : b^2],$$

$$N = [ab : a^2 : b^2],$$

$$C = [a^2 : b^2 : ab],$$

$$G = [b : a^2 : ab],$$

$$B = [b : b : a],$$

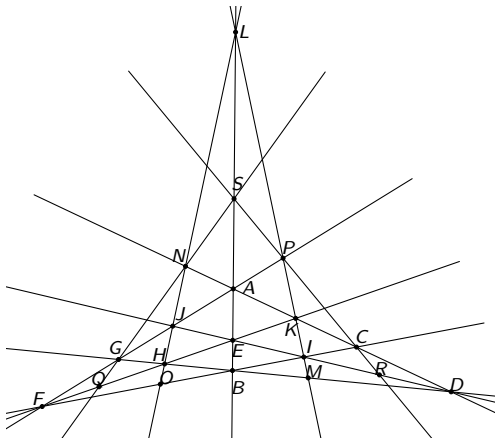
$$O = [b^2 : ab : a^2],$$

$$M = [ab : b^2 : a^2],$$

$$Q = [b^2 + ab - a^2 : a^2 : a^2],$$

$$R = [a^2 : b^2 + ab - a^2 : a^2],$$

$$S = [a^2b(a - b) : a^2b(a - b) : b(a^3 - 2a^2b + b^3)]$$



Konstrukcja \mathcal{B}_{12}

$$F = [1 : 0 : 0]$$

$$D = [0 : 1 : 0],$$

$$L = [0 : 0 : 1],$$

$$E = [1 : 1 : 1],$$

$$A = [a : a : b],$$

$$J = [b : a : b],$$

$$K = [a : b : b],$$

$$H = [b : a : a],$$

$$I = [a : b : a],$$

$$P = [a^2 : ab : b^2],$$

$$N = [ab : a^2 : b^2],$$

$$C = [a^2 : b^2 : ab],$$

$$G = [b : a^2 : ab],$$

$$B = [b : b : a],$$

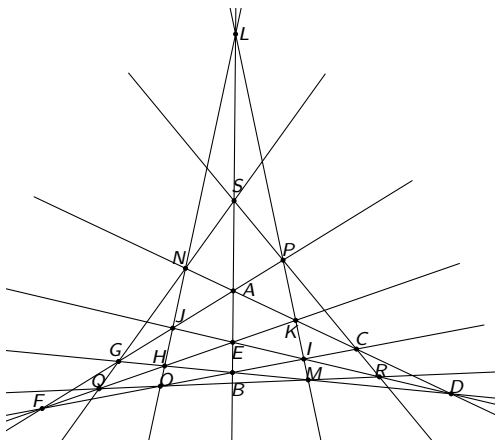
$$O = [b^2 : ab : a^2],$$

$$M = [ab : b^2 : a^2],$$

$$Q = [b^2 + ab - a^2 : a^2 : a^2],$$

$$R = [a^2 : b^2 + ab - a^2 : a^2],$$

$$S = [a^2b(a - b) : a^2b(a - b) : b(a^3 - 2a^2b + b^3)]$$



Wymierny kontrprzykład

Wszystkie konfiguracje \mathcal{B}_{12} tworzą 1-wymiarową rodzinę parametryzowaną przez krzywą wymierną.

Wymierny kontrprzykład

Wymierny kontrprzykład

Wszystkie konfiguracje \mathcal{B}_{12} tworzą 1-wymiarową rodzinę parametryzowaną przez krzywą wymierną.

Pytanie

Czy inne konfiguracje Böröczky'ego \mathcal{B}_d dla $d \geq 13$ również dają wymierne kontrprzykłady?

•1

•2

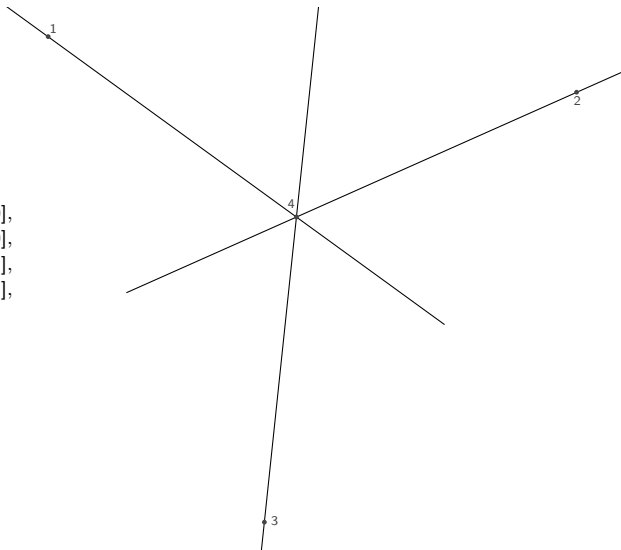
$$\begin{aligned}P_1 &= [1 : 0 : 0], \\P_2 &= [0 : 1 : 0], \\P_3 &= [0 : 0 : 1], \\P_4 &= [1 : 1 : 1],\end{aligned}$$

•4

•3

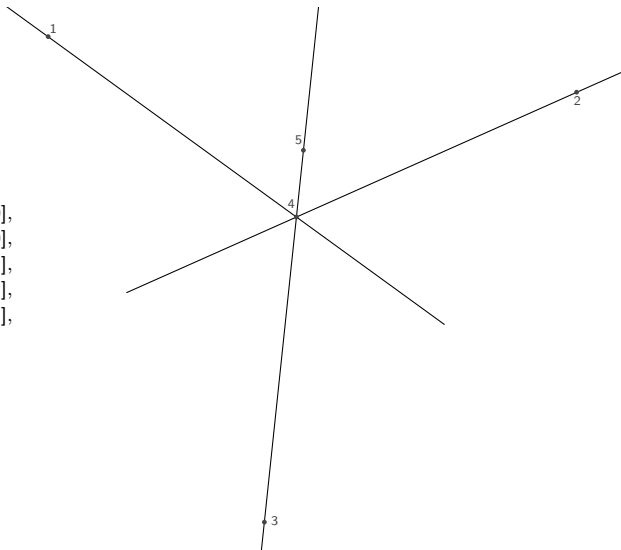
Konstrukcja \mathcal{B}_{15}

$$\begin{aligned}P_1 &= [1 : 0 : 0], \\P_2 &= [0 : 1 : 0], \\P_3 &= [0 : 0 : 1], \\P_4 &= [1 : 1 : 1],\end{aligned}$$



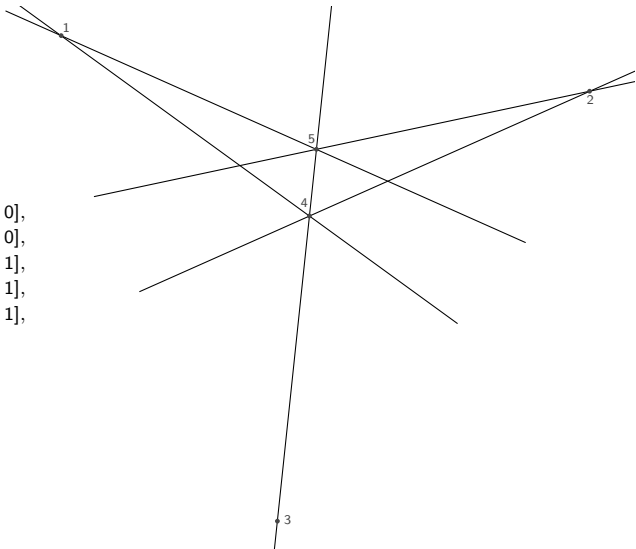
Konstrukcja \mathcal{B}_{15}

$$\begin{aligned}P_1 &= [1 : 0 : 0], \\P_2 &= [0 : 1 : 0], \\P_3 &= [0 : 0 : 1], \\P_4 &= [1 : 1 : 1], \\P_5 &= [a : a : 1],\end{aligned}$$



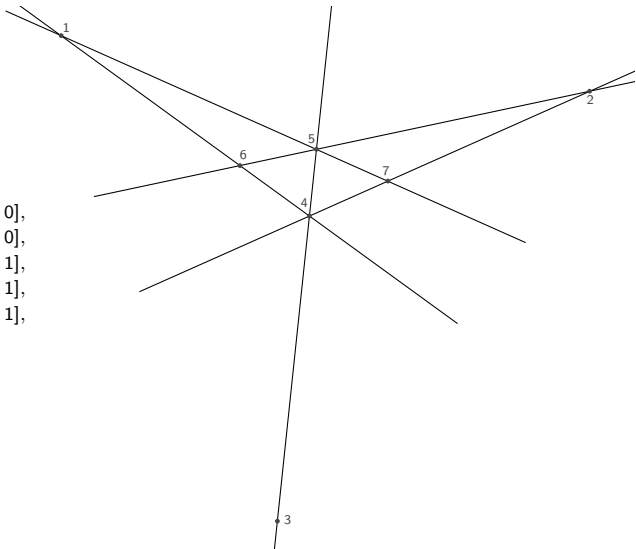
Konstrukcja \mathcal{B}_{15}

$$\begin{aligned}P_1 &= [1 : 0 : 0], \\P_2 &= [0 : 1 : 0], \\P_3 &= [0 : 0 : 1], \\P_4 &= [1 : 1 : 1], \\P_5 &= [a : a : 1],\end{aligned}$$



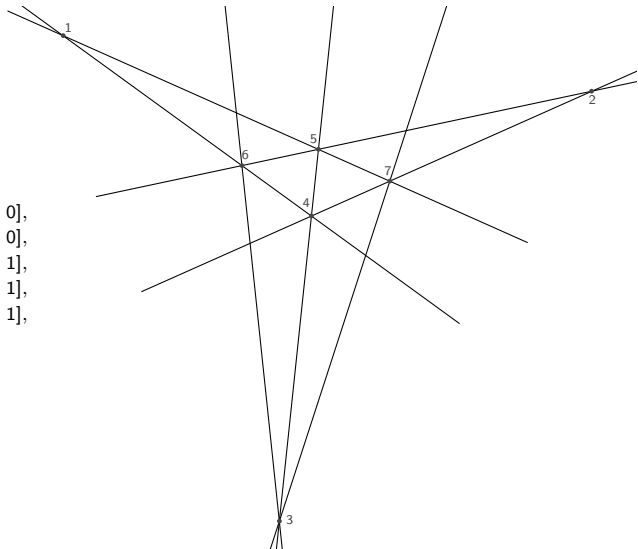
Konstrukcja \mathcal{B}_{15}

$$\begin{aligned}P_1 &= [1 : 0 : 0], \\P_2 &= [0 : 1 : 0], \\P_3 &= [0 : 0 : 1], \\P_4 &= [1 : 1 : 1], \\P_5 &= [a : a : 1],\end{aligned}$$



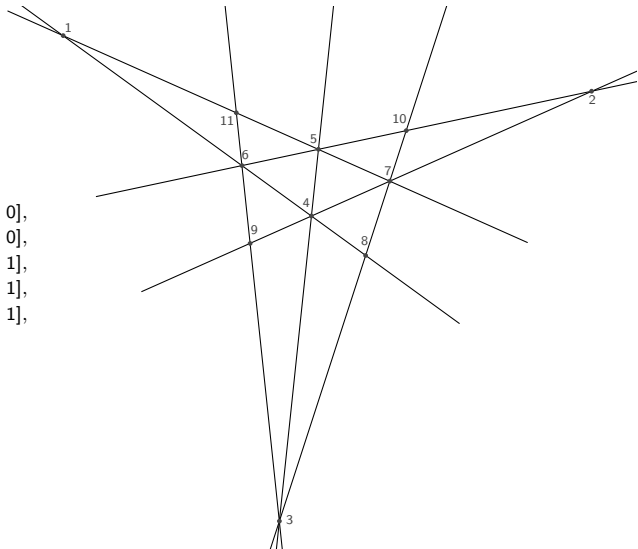
Konstrukcja \mathcal{B}_{15}

$$\begin{aligned} P_1 &= [1 : 0 : 0], \\ P_2 &= [0 : 1 : 0], \\ P_3 &= [0 : 0 : 1], \\ P_4 &= [1 : 1 : 1], \\ P_5 &= [a : a : 1], \end{aligned}$$



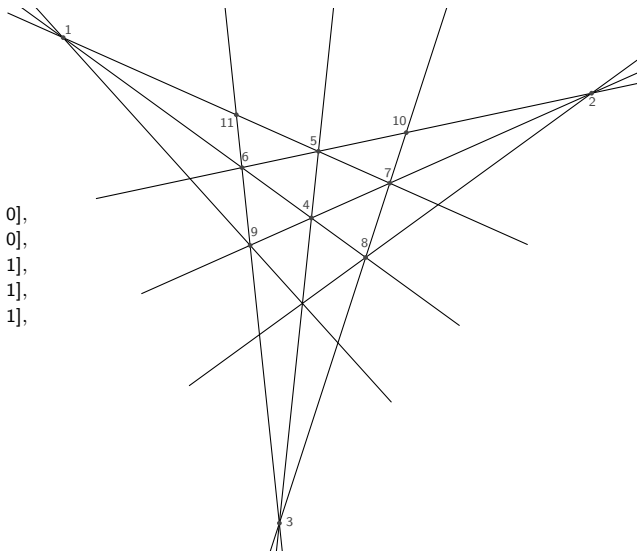
Konstrukcja \mathcal{B}_{15}

$$\begin{aligned} P_1 &= [1 : 0 : 0], \\ P_2 &= [0 : 1 : 0], \\ P_3 &= [0 : 0 : 1], \\ P_4 &= [1 : 1 : 1], \\ P_5 &= [a : a : 1], \end{aligned}$$



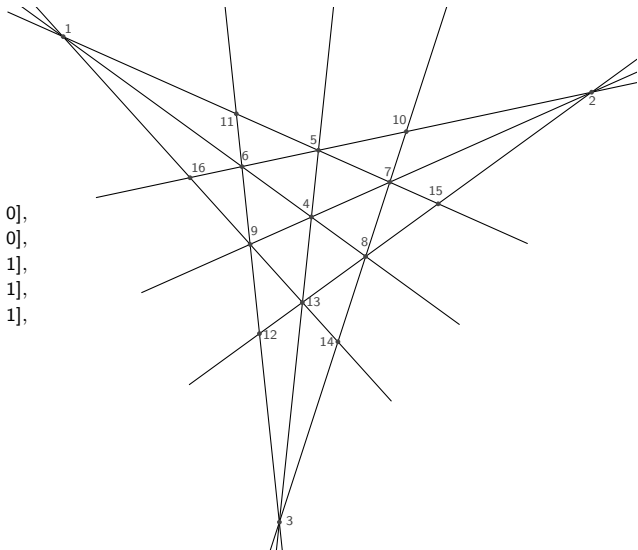
Konstrukcja \mathcal{B}_{15}

$$\begin{aligned} P_1 &= [1 : 0 : 0], \\ P_2 &= [0 : 1 : 0], \\ P_3 &= [0 : 0 : 1], \\ P_4 &= [1 : 1 : 1], \\ P_5 &= [a : a : 1], \end{aligned}$$



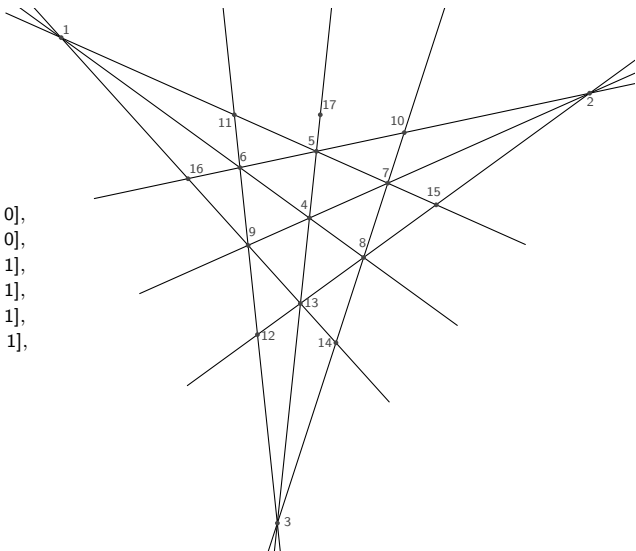
Konstrukcja \mathcal{B}_{15}

$$\begin{aligned} P_1 &= [1 : 0 : 0], \\ P_2 &= [0 : 1 : 0], \\ P_3 &= [0 : 0 : 1], \\ P_4 &= [1 : 1 : 1], \\ P_5 &= [a : a : 1], \end{aligned}$$



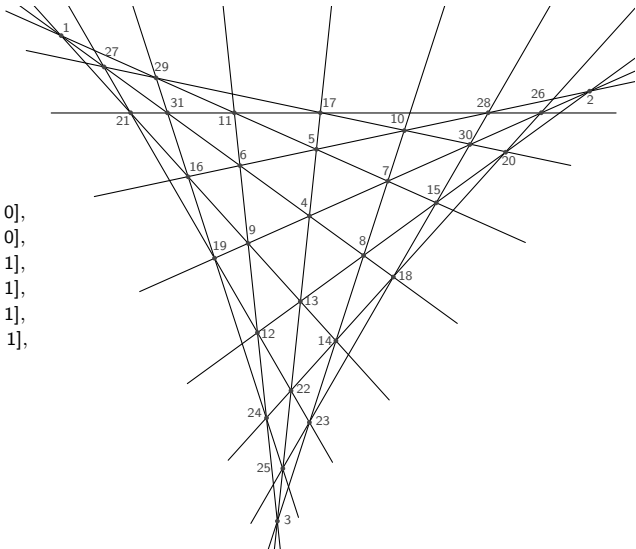
Konstrukcja \mathcal{B}_{15}

$$\begin{aligned}P_1 &= [1 : 0 : 0], \\P_2 &= [0 : 1 : 0], \\P_3 &= [0 : 0 : 1], \\P_4 &= [1 : 1 : 1], \\P_5 &= [a : a : 1], \\P_{17} &= [b : b : 1],\end{aligned}$$



Konstrukcja \mathcal{B}_{15}

$$\begin{aligned}P_1 &= [1 : 0 : 0], \\P_2 &= [0 : 1 : 0], \\P_3 &= [0 : 0 : 1], \\P_4 &= [1 : 1 : 1], \\P_5 &= [a : a : 1], \\P_{17} &= [b : b : 1],\end{aligned}$$



Teraz musimy sprawdzić przy jakich warunkach wszystkie incydencje są spełnione.

Teraz musimy sprawdzić przy jakich warunkach wszystkie incydencje są spełnione.

Otrzymujemy wielomianowe równania zawierające a oraz b .
Najmniejszym ideałem zawierającym wszystkie te wielomiany jest ideał generowany przez wielomian

$$(a - 1)^2(a^4b - a^2b^2 - a^3 + a^2b - ab^2 + b^2).$$

Teraz musimy sprawdzić przy jakich warunkach wszystkie incydencje są spełnione.

Otrzymujemy wielomianowe równania zawierające a oraz b .
Najmniejszym ideałem zawierającym wszystkie te wielomiany jest ideał generowany przez wielomian

$$(a - 1)^2(a^4b - a^2b^2 - a^3 + a^2b - ab^2 + b^2).$$

Ponieważ, z założenia $a \neq 1$, więc musi być spełniony warunek

$$f := a^4b - a^2b^2 - a^3 + a^2b - ab^2 + b^2 = 0.$$

Gładkim modelem krzywej osobliwej zdefiniowanej przez f jest krzywa eliptyczna E , której postać kanoniczna wygląda następująco

$$E : Y^2 + XY + Y = X^3 + X^2.$$

Gładkim modelem krzywej osobliwej zdefiniowanej przez f jest krzywa eliptyczna E , której postać kanoniczna wygląda następująco

$$E : Y^2 + XY + Y = X^3 + X^2.$$

Theorem 1

Wszystkie konfiguracje \mathcal{B}_{15} tworzą 1-wymiarową rodzinę parametryzowaną przez krzywa eliptyczną.

Gładkim modelem krzywej osobliwej zdefiniowanej przez f jest krzywa eliptyczna E , której postać kanoniczna wygląda następująco

$$E : Y^2 + XY + Y = X^3 + X^2.$$

Theorem 1

Wszystkie konfiguracje \mathcal{B}_{15} tworzą 1-wymiarową rodzinę parametryzowaną przez krzywa eliptyczną.

E zawiera tylko 4 punkty wymierne. Wszystkie odpowiadają wartościom a i b wykluczonym podczas konstrukcji.

Gładkim modelem krzywej osobliwej zdefiniowanej przez f jest krzywa eliptyczna E , której postać kanoniczna wygląda następująco

$$E : Y^2 + XY + Y = X^3 + X^2.$$

Theorem 1

Wszystkie konfiguracje \mathcal{B}_{15} tworzą 1-wymiarową rodzinę parametryzowaną przez krzywa eliptyczną.

E zawiera tylko 4 punkty wymierne. Wszystkie odpowiadają wartościom a i b wykluczonym podczas konstrukcji.

Wniosek

Nie istnieje wymierna konfiguracja \mathcal{B}_{15} .

Farnik, Kabat, Lampa-Baczyńska, Tutaj-Gasińska

1. Opisać przestrzeń parametrów konfiguracji \mathcal{B}_d dla $d \geq 13$ oraz $d \neq 15$.
2. Rozstrzygnąć które konfiguracje \mathcal{B}_d (dla $d \geq 13$) mają wymierne realizacje.

Farnik, Kabat, Lampa-Baczyńska, Tutaj-Gasińska

1. Opisać przestrzeń parametrów konfiguracji \mathcal{B}_d dla $d \geq 13$ oraz $d \neq 15$.
2. Rozstrzygnąć które konfiguracje \mathcal{B}_d (dla $d \geq 13$) mają wymierne realizacje.

Problem typu Sylvester-Gallai dla wymiernych konfiguracji

Znaleźć kryteria, które pozwolą rozróżnić wymierne i rzeczywiste konfiguracje.