

Funkcja Hilberta prostych i tłuŝtej prostej

Justyna Szpond

Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Łódź, 8-12 stycznia, 2018

Wykład przygotowany jest na podstawie wspólnej pracy (arXiv: 1706.02350) z

Thomasem Bauerem (Marburg),

Sandrą Di Rocco (KTH Stockholm),

Davidem Schmitzem (Marburg)

i

Tomaszem Szembergim (UP Kraków).

Prezentacja dostępna jest na stronie:

<http://szpond.up.krakow.pl/Lodz 2018.pdf>

Definicja

Niech $I \subset R$ będzie ideałem jednorodnym w pierścieniu wielomianów $R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$. Funkcją Hilberta ideału I nazywamy odwzorowanie $\text{HF}_{R/I}$ zadane wzorem

$$\text{HF}_{R/I}(d) = \dim(R/I)_d.$$

Definicja

Niech $I \subset R$ będzie ideałem jednorodnym w pierścieniu wielomianów $R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_N]$. Funkcją Hilberta ideału I nazywamy odwzorowanie $\text{HF}_{R/I}$ zadane wzorem

$$\text{HF}_{R/I}(d) = \dim(R/I)_d.$$

Twierdzenie

Funkcja Hilberta od pewnego momentu staje się wielomianem, tzn. istnieje wielomian $\text{HP}_{R/I}(d)$ taki, że

$$\text{HF}_{R/I}(d) = \text{HP}_{R/I}(d) \quad \text{dla } d \gg 0.$$

Jeśli I jest wysaturowanym ideałem definiującym podschemat $V \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{K})$, to piszemy

$$\mathrm{HF}_V(d) = \mathrm{HF}_{R/I}(d)$$

oraz

$$\mathrm{HP}_V(d) = \mathrm{HP}_{R/I}(d).$$

Wniosek

Wielomian Hilberta może być wyznaczony algorytmicznie, np. za pomocą programów do obliczeń symbolicznych. Funkcja Hilberta jest znacznie trudniejsza do wyznaczenia.

Wniosek

Wielomian Hilberta może być wyznaczony algorytmicznie, np. za pomocą programów do obliczeń symbolicznych. Funkcja Hilberta jest znacznie trudniejsza do wyznaczenia.

Problem

Wyznaczyć funkcję Hilberta dla dowolnego podschematu w $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$.

Wniosek

Wielomian Hilberta może być wyznaczony algorytmicznie, np. za pomocą programów do obliczeń symbolicznych. Funkcja Hilberta jest znacznie trudniejsza do wyznaczenia.

Problem

Wyznaczyć funkcję Hilberta dla dowolnego podschematu w $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$.

Uwaga

W takiej ogólności problem ten jest zbyt trudny.

Wniosek

Wielomian Hilberta może być wyznaczony algorytmicznie, np. za pomocą programów do obliczeń symbolicznych. Funkcja Hilberta jest znacznie trudniejsza do wyznaczenia.

Problem

Wyznaczyć funkcję Hilberta dla dowolnego podschematu w $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$.

Uwaga

W takiej ogólności problem ten jest zbyt trudny.

Najprostsze funkcje Hilberta pojawiają się dla podrozmaitości, które zadają niezależne warunki na formy określonego stopnia.

Definicja (Carlini, Catalisano, Geramita)

Mówimy, że podschemat $V \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ ma dwuwielomianową funkcję Hilberta jeśli

$$\text{HF}_V(d) = \min \{ \text{HP}_{\mathbb{P}^N}(d), \text{HP}_V(d) \}$$

dla każdego d .

Definicja (Carlini, Catalisano, Geramita)

Mówimy, że podschemat $V \subset \mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ ma dwuwielomianową funkcję Hilberta jeśli

$$\mathrm{HF}_V(d) = \min \{ \mathrm{HP}_{\mathbb{P}^N}(d), \mathrm{HP}_V(d) \}$$

dla każdego d .

Uwaga

Dla każdego d zachodzi

$$\mathrm{HP}_{\mathbb{P}^N}(d) = \binom{N+d}{d}.$$

Przykład

Niech V będzie skończoną sumą s ogólnych punktów w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$. Wtedy V ma dwuwielomianową funkcję Hilberta.

Przykład

Niech V będzie skończoną sumą s ogólnych punktów w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$. Wtedy V ma dwuwielomianową funkcję Hilberta. Dokładniej, mamy

$$\mathrm{HF}_V(d) = \min \left\{ \binom{N+d}{d}, s \right\}$$

dla każdego d .

Twierdzenie (Alexander-Hirschowitz 1995)

Niech V będzie układem s ogólnych punktów podwójnych w $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ (nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero). Wtedy

$$\text{HF}_V(d) = \min \left\{ \binom{N+d}{d}, s(N+1) \right\}$$

poza następującymi przypadkami

- $d = 2, 2 \leq s \leq N$;
- $N = 2, d = 4, s = 5$;
- $N = 3, d = 4, s = 9$;
- $N = 4, d = 4, s = 14$;
- $N = 4, d = 3, s = 7$.

Twierdzenie (Alexander-Hirschowitz 1995)

Niech V będzie układem s ogólnych punktów podwójnych w $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ (nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero). Wtedy

$$\text{HF}_V(d) = \min \left\{ \binom{N+d}{d}, s(N+1) \right\}$$

poza następującymi przypadkami

- $d = 2, 2 \leq s \leq N$;
- $N = 2, d = 4, s = 5$;
- $N = 3, d = 4, s = 9$;
- $N = 4, d = 4, s = 14$;
- $N = 4, d = 3, s = 7$.

Uwaga

Autorzy pracowali nad tym problemem ponad 10 lat.

Dowód Alexandra i Hirschowitza jest raczej zawiły. Był on upraszczany przez wielu autorów, m.in.

- Karen Chandler (Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001) i Compositio Math. 134 (2002));

Dowód Alexandra i Hirschowitza jest raczej zawiły. Był on upraszczany przez wielu autorów, m.in.

- Karen Chandler (Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001) i Compositio Math. 134 (2002));
- Maria Brambilla i Giorgio Ottaviani (J. Pure Appl. Algebra 212 (2008));

Dowód Alexandra i Hirschowitza jest raczej zawiły. Był on upraszczany przez wielu autorów, m.in.

- Karen Chandler (Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001) i Compositio Math. 134 (2002));
- Maria Brambilla i Giorgio Ottaviani (J. Pure Appl. Algebra 212 (2008));
- Elisa Postinghel (Ann. Mat. Pura Appl. (4) 191 (2012)).

Dowód Alexandra i Hirschowitza jest raczej zawiły. Był on upraszczany przez wielu autorów, m.in.

- Karen Chandler (Trans. Amer. Math. Soc. 353 (2001) i Compositio Math. 134 (2002));
- Maria Brambilla i Giorgio Ottaviani (J. Pure Appl. Algebra 212 (2008));
- Elisa Postinghel (Ann. Mat. Pura Appl. (4) 191 (2012)).

Uwaga

*Wszystkie dowody bazują na pewnych **degeneracjach**, tzn., jeśli warunek zachodzi dla punktów w pozycji **szczególnej**, to zachodzi również dla punktów w pozycji **ogólnej** (pod warunkiem, że oba położenia należą do płaskiej rodziny podschematów).*

Wielu autorów studiowało problem dla punktów ogólnych z wyższymi krotnościami

Wielu autorów studiowało problem dla punktów ogólnych z wyższymi krotnościami m.in.

- **Ciro Ciliberto i Rick Miranda:** \mathbb{P}^2 , równe krotności $m \leq 12$ (Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000));

Wielu autorów studiowało problem dla punktów ogólnych z wyższymi krotnościami m.in.

- **Ciro Ciliberto i Rick Miranda:** \mathbb{P}^2 , równe krotności $m \leq 12$ (Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000));
- **Stephanie Yang:** \mathbb{P}^2 , różne krotności ≤ 7 (J. Algebraic Geom. 16 (2007));

Wielu autorów studiowało problem dla punktów ogólnych z wyższymi krotnościami m.in.

- **Ciro Ciliberto i Rick Miranda:** \mathbb{P}^2 , równe krotności $m \leq 12$ (Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000));
- **Stephanie Yang:** \mathbb{P}^2 , różne krotności ≤ 7 (J. Algebraic Geom. 16 (2007));
- **Marcin Dumnicki i Witold Jarnicki:** \mathbb{P}^2 , równe krotności ≤ 42 (J. Symbolic Comput. 42 (2007));

Wielu autorów studiowało problem dla punktów ogólnych z wyższymi krotnościami m.in.

- Ciro Ciliberto i Rick Miranda: \mathbb{P}^2 , równe krotności $m \leq 12$ (Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000));
- Stephanie Yang: \mathbb{P}^2 , różne krotności ≤ 7 (J. Algebraic Geom. 16 (2007));
- Marcin Dumnicki i Witold Jarnicki: \mathbb{P}^2 , równe krotności ≤ 42 (J. Symbolic Comput. 42 (2007));

Uwaga

*Ciliberto i Miranda wprowadzili **degenerację** przestrzeni otaczającej (zastąpili \mathbb{P}^2 przez inny schemat) dokonując jednocześnie specjalizacji położenia punktów.*

Hipoteza (SHGH, Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz)

Niech V będzie zbiorem s ogólnych punktów krotności m w $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.
Wtedy albo

$$\mathrm{HF}_V(d) = \min \left\{ \binom{d+2}{2}, s \binom{m+1}{2} \right\}$$

albo system liniowy

$$|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) \otimes \mathcal{I}_V^{(m)}|$$

zawiera tłustą (-1) -krzywą w zbiorze punktów bazowych.

Twierdzenie (Hartshorne-Hirschowitz 1982)

Niech V będzie zbiorem s ogólnych prostych w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$, z $N \geq 3$. Wtedy funkcja Hilberta V jest dwuwielomianowa.

Twierdzenie (Hartshorne-Hirschowitz 1982)

Niech V będzie zbiorem s ogólnych prostych w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$, z $N \geq 3$. Wtedy funkcja Hilberta V jest dwuwielomianowa. Dokładniej, mamy

$$\mathrm{HF}_V(d) = \min \left\{ \binom{N+d}{d}, s(d+1) \right\}.$$

Twierdzenie (Hartshorne-Hirschowitz 1982)

Niech V będzie zbiorem s ogólnych prostych w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$, z $N \geq 3$. Wtedy funkcja Hilberta V jest dwuwielomianowa. Dokładniej, mamy

$$\text{HF}_V(d) = \min \left\{ \binom{N+d}{d}, s(d+1) \right\}.$$

Najtrudniejszym przypadkiem jest $N = 3$. Dowód w przypadku \mathbb{P}^3 opiera się na specjalizacji niektórych prostych na gładką kwadrykę przy jednoczesnej specjalizacji par innych prostych tak, aby ich punkty przecięcia leżały na tej kwadryce.

Twierdzenie (Carlini, Catalisano, Geramita 2013, druk 2016)

Niech V będzie układem s ogólnych prostych i jednego ogólnego punktu krotności m w rzutowej przestrzeni $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$, z $N \geq 4$. Wtedy funkcja Hilberta V jest dwuwielomianowa.

Twierdzenie (Carlini, Catalisano, Geramita 2013, druk 2016)

Niech V będzie układem s ogólnych prostych i jednego ogólnego punktu krotności m w rzutowej przestrzeni $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$, z $N \geq 4$. Wtedy funkcja Hilberta V jest dwuwielomianowa.

Dokładniej, mamy

$$\mathrm{HF}_V(d) = \min \left\{ \binom{N+d}{d}, s(d+1) + \binom{m+N-1}{N} \right\}. \quad (1)$$

Twierdzenie (Carlini, Catalisano, Geramita 2013, druk 2016)

Niech V będzie układem s ogólnych prostych i jednego ogólnego punktu krotności m w rzutowej przestrzeni $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$, z $N \geq 4$. Wtedy funkcja Hilberta V jest dwuwielomianowa.

Dokładniej, mamy

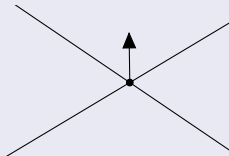
$$\text{HF}_V(d) = \min \left\{ \binom{N+d}{d}, s(d+1) + \binom{m+N-1}{N} \right\}. \quad (1)$$

Uwaga

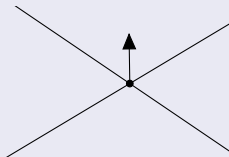
W przypadku $N = 3$ sytuacja jest bardziej skomplikowana:
Równość (1) jest nieprawdziwa dla

$$2 \leq s \leq m \text{ i } d = m.$$

Carlini, Catalisano i Geramita rozważali składowe V w specjalnej pozycji i wprowadzili **sundiale**. Są to degeneracje rozłącznej pary prostych do pary prostych przecinających się, z zanurzoną składową w punkcie przecięcia.



Carlini, Catalisano i Geramita rozważali składowe V w specjalnej pozycji i wprowadzili **sundiale**. Są to degeneracje rozłącznej pary prostych do pary prostych przecinających się, z zanurzoną składową w punkcie przecięcia.



Przypadek $N = 3$ został rozwiązany przez Aladpoosh-Ballico (Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 2015) i Ballico (Mediterranean Journal of Mathematics (2016)).

Problem (Carlini, Catalisano, Geramita)

Znaleźć funkcję Hilberta schematu w \mathbb{P}^N składającego się ze zbioru ogólnych prostych i jednej tłustej liniowej podprzestrzeni ustalonego wymiaru.

Problem (Carlini, Catalisano, Geramita)

Znaleźć funkcję Hilberta schematu w \mathbb{P}^N składającego się ze zbioru ogólnych prostych i jednej tłustej liniowej podprzestrzeni ustalonego wymiaru.

Motywacja: Wyznaczyć wymiar (wyższych) rozmaitości siecznych do zanurzenia Segrego produktu przestrzeni rzutowych.

Definicja (Ballico)

"Podwójną" prostą $Y \subset \mathbb{P}^3$ nazywamy spójny dywizor typu $(2, 0)$ na gładkiej kwadryce.

Definicja (Ballico)

"Podwójną" prostą $Y \subset \mathbb{P}^3$ nazywamy spójny dywizor typu $(2, 0)$ na gładkiej kwadryce.

Uwaga

Definicja ta to raczej uogólnienie zero-wymiarowego podschematu długości 2 niż punktu podwójnego (który ma długość 3).

Definicja (Ballico)

"Podwójną" prostą $Y \subset \mathbb{P}^3$ nazywamy spójny dywizor typu $(2, 0)$ na gładkiej kwadryce.

Uwaga

Definicja ta to raczej uogólnienie zero-wymiarowego podschematu długości 2 niż punktu podwójnego (który ma długość 3).

Twierdzenie (Ballico 2012)

Niech V będzie zbiorem s ogólnych prostych i t ogólnych "podwójnych" prostych w \mathbb{P}^3 . Wtedy V ma dwuwielomianową funkcję Hilberta.

Definicja

Podwójną prostą $X \subset \mathbb{P}^3$ nazywamy podschemat, którego nośnikiem jest prosta L i którego struktura jest określona przez kwadrat wysaturowanego ideału I_L definiującego L .

Definicja

Podwójną prostą $X \subset \mathbb{P}^3$ nazywamy podschemat, którego nośnikiem jest prosta L i którego struktura jest określona przez kwadrat wysaturowanego ideału I_L definiującego L .

Twierdzenie (Aladpoosh 2016)

Niech V będzie zbiorem s ogólnych prostych i jednej ogólnej prostej podwójnej w \mathbb{P}^N , gdzie $N \geq 3$. Wtedy

$$\mathrm{HF}_V(d) = \min \left\{ \binom{N+d}{d}, s(d+1) + (Nd+1) \right\}$$

z wyjątkiem

- $N = 4, s = 2, d = 2$.

Twierdzenie (Bauer, Di Rocco, Schmitz, Szemberg, Sz.)

Niech V będzie zbiorem s ogólnych prostych i jednej ogólnej prostej krotności m (tzn. zdefiniowanej przez I_L^m) w \mathbb{P}^3 . Wtedy

$$\mathrm{HF}_V(d) = \min \left\{ \binom{d+3}{d}, s(d+1) + \frac{1}{6}m(m+1)(3d+5-2m) \right\}$$

dla wszystkich $d \geq 3 \binom{m+1}{3}$.

Definicja (Zygzak)

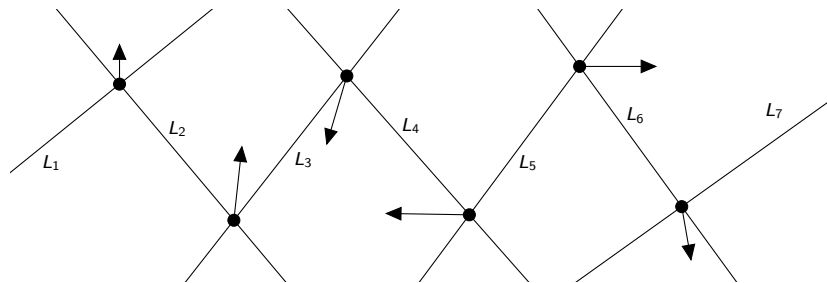
Zygzakiem długości z nazywamy schemat graniczny otrzymany jako specjalizację uporządkowanego zbioru z ogólnych prostych L_1, L_2, \dots, L_z w ten sposób, że prosta L_1 przecina L_2 , prosta L_2 przecina L_1 i L_3 oraz ich punkty przecięcia są różne, prosta L_3 przecina L_2 i L_4 oraz ich punkty przecięcia są różne, itd, ostatecznie, prosta L_{z-1} przecina L_{z-2} i L_z w dwóch różnych punktach. Struktura w punktach przecięcia jest taka sama jak struktura sundialu w punkcie przecięcia się prostych.

Definicja (Zygzak)

Zygzakiem długości z nazywamy schemat graniczny otrzymany jako specjalizację uporządkowanego zbioru z ogólnych prostych L_1, L_2, \dots, L_z w ten sposób, że prosta L_1 przecina L_2 , prosta L_2 przecina L_1 i L_3 oraz ich punkty przecięcia są różne, prosta L_3 przecina L_2 i L_4 oraz ich punkty przecięcia są różne, itd, ostatecznie, prosta L_{z-1} przecina L_{z-2} i L_z w dwóch różnych punktach. Struktura w punktach przecięcia jest taka sama jak struktura sundialu w punkcie przecięcia się prostych. Zygzak długości z ma zatem $(z - 1)$ punktów osobliwych.

Definicja (Zygzak)

Zygzakiem długości z nazywamy schemat graniczny otrzymany jako specjalizację uporządkowanego zbioru z ogólnych prostych L_1, L_2, \dots, L_z w ten sposób, że prosta L_1 przecina L_2 , prosta L_2 przecina L_1 i L_3 oraz ich punkty przecięcia są różne, prosta L_3 przecina L_2 i L_4 oraz ich punkty przecięcia są różne, itd, ostatecznie, prosta L_{z-1} przecina L_{z-2} i L_z w dwóch różnych punktach. Struktura w punktach przecięcia jest taka sama jak struktura sundialu w punkcie przecięcia się prostych. Zygzak długości z ma zatem $(z - 1)$ punktów osobliwych. Sundial jest zygzakiem długości 2.



Krok 1

Punkty osobliwe z zygzaka specjalizujemy na ogólną gładką kwadrykę w \mathbb{P}^3 .

Krok 1

Punkty osobliwe z zygzaka specjalizujemy na ogólną gładką kwadrykę w \mathbb{P}^3 . Pokazujemy, że kwadryka jest składową rozważanego systemu liniowego, zatem możemy ją "wyciągnąć" (co zmniejsza stopień d o 2). Schemat rezydualny zygzaka nazywamy **zredukowanym** zygzakiem.

Krok 1

Punkty osobliwe z zygzaka specjalizujemy na ogólną gładką kwadrykę w \mathbb{P}^3 . Pokazujemy, że kwadryka jest składową rozważanego systemu liniowego, zatem możemy ją "wyciągnąć" (co zmniejsza stopień d o 2). Schemat rezydualny zygzaka nazywamy **zredukowanym** zygzakiem.

Krok 2

Co drugą prostą **zredukowanego** zygzaka specjalizujemy na gładką kwadrykę jako ogólną prostą, wszystkie w tym samym rulingu.

Krok 1

Punkty osobliwe z zygzaka specjalizujemy na ogólną gładką kwadrykę w \mathbb{P}^3 . Pokazujemy, że kwadryka jest składową rozważanego systemu liniowego, zatem możemy ją "wyciągnąć" (co zmniejsza stopień d o 2). Schemat rezydualny zygzaka nazywamy **zredukowanym** zygzakiem.

Krok 2

Co drugą prostą **zredukowanego** zygzaka specjalizujemy na gładką kwadrykę jako ogólną prostą, wszystkie w tym samym rulingu. Pokazujemy, że również ta kwadryka jest składową systemu liniowego. Po jej wyjęciu, stopień systemu zmniejszy się o 2. Systemem rezydualnym zredukowanego zygzaka jest układ rozłącznych ogólnych prostych.

Definicja (Ślad i schemat rezydualny)

Niech Y będzie gładkim dywizorem w \mathbb{P}^N i niech $Z \subset \mathbb{P}^N$ będzie domkniętym podschematem. Wtedy podschemat $Z'' = \text{Tr}_Y(Z)$ zdefiniowany na Y przez ideał

$$I_{Z''/Y} = (I_Y + I_Z) / I_Y \subset \mathcal{O}_Y$$

nazywamy śladem Z na Y .

Iloraz $I_{Z'} = (I_Z : I_Y) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ definiuje $Z' = \text{Res}_Y(Z)$, nazywany schematem rezydualnym schematu Z względem Y .

Definicja (Ślad i schemat rezydualny)

Niech Y będzie gładkim dywizorem w \mathbb{P}^N i niech $Z \subset \mathbb{P}^N$ będzie domkniętym podschematem. Wtedy podschemat $Z'' = \text{Tr}_Y(Z)$ zdefiniowany na Y przez ideał

$$I_{Z''/Y} = (I_Y + I_Z) / I_Y \subset \mathcal{O}_Y$$

nazywamy śladem Z na Y .

Iloraz $I_{Z'} = (I_Z : I_Y) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ definiuje $Z' = \text{Res}_Y(Z)$, nazywany schematem rezydualnym schematu Z względem Y .

Ciąg rezydualny

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{Z'}(-Y) \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow \mathcal{I}_{Z''/Y} \longrightarrow 0$$

Definicja (Ślad i schemat rezydualny)

Niech Y będzie gładkim dywizorem w \mathbb{P}^N i niech $Z \subset \mathbb{P}^N$ będzie domkniętym podschematem. Wtedy podschemat $Z'' = \text{Tr}_Y(Z)$ zdefiniowany na Y przez ideał

$$I_{Z''/Y} = (I_Y + I_Z) / I_Y \subset \mathcal{O}_Y$$

nazywamy śladem Z na Y .

Iloraz $I_{Z'} = (I_Z : I_Y) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}$ definiuje $Z' = \text{Res}_Y(Z)$, nazywany schematem rezydualnym schematu Z względem Y .

Ciąg rezydualny

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{Z'}(-Y) \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow \mathcal{I}_{Z''/Y} \longrightarrow 0$$

Stosujemy ten ciąg z gładką kwadryką Y w \mathbb{P}^3 i wszystkie elementy tensorujemy ze snopem $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)$.

Lemat

Niech $Y \subset \mathbb{P}^N$ będzie dywizorem stopnia e i niech $d \geq e$ będzie liczbą całkowitą. Niech $Z \subset \mathbb{P}^N$ będzie domkniętym podschematem. Wtedy

$$h^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes \mathcal{I}_Z) \leq h^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d-e) \otimes \mathcal{I}_{\text{Res}_Y(Z)}) + \\ + h^0(Y, \mathcal{O}_Y(d) \otimes \mathcal{I}_{\text{Tr}_Y(Z)/Y}).$$

Lemat

Niech $Y \subset \mathbb{P}^N$ będzie dywizorem stopnia e i niech $d \geq e$ będzie liczbą całkowitą. Niech $Z \subset \mathbb{P}^N$ będzie domkniętym podschematem. Wtedy

$$h^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes \mathcal{I}_Z) \leq h^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d - e) \otimes \mathcal{I}_{\text{Res}_Y(Z)}) + \\ + h^0(Y, \mathcal{O}_Y(d) \otimes \mathcal{I}_{\text{Tr}_Y(Z)/Y}).$$

Przestrzeń $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d - e) \otimes \mathcal{I}_{\text{Res}_Y(Z)})$ nazywamy rezydualnym systemem liniowym $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes \mathcal{I}_Z)$ względem Y , a $H^0(Y, \mathcal{O}_Y(d) \otimes \mathcal{I}_{\text{Tr}_Y(Z)/Y})$ nazywamy śladem $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d) \otimes \mathcal{I}_Z)$ na Y .

Szkic dowodu

Etapy dowodu głównego twierdzenia

- specjalizujemy proste i punkty z zygzaków na gładką kwadrykę;

Szkic dowodu

Etapy dowodu głównego twierdzenia

- specjalizujemy proste i punkty z zygzaków na gładką kwadrykę;
- sprawdzamy, że ślad systemu na kwadryce jest pusty (stosujemy lemat z pracy Tomasza Lenarcika (Ann. Polon. Math. 101 (2011)));

Szkic dowodu

Etapy dowodu głównego twierdzenia

- specjalizujemy proste i punkty z zygzaków na gładką kwadrykę;
- sprawdzamy, że ślad systemu na kwadryce jest pusty (stosujemy lemat z pracy Tomasza Lenarcika (Ann. Polon. Math. 101 (2011)));
- wyciągamy kwadrykę i rozważamy system rezydualny;

Szkic dowodu

Etapy dowodu głównego twierdzenia

- specjalizujemy proste i punkty z zygzaków na gładką kwadrykę;
- sprawdzamy, że ślad systemu na kwadrycy jest pusty (stosujemy lemat z pracy Tomasza Lenarcika (Ann. Polon. Math. 101 (2011)));
- wyciągamy kwadrykę i rozważamy system rezydualny;
- **starannie zapisujemy wszystkie dane!**

Szkic dowodu

Etapy dowodu głównego twierdzenia

- specjalizujemy proste i punkty z zygzaków na gładką kwadrykę;
- sprawdzamy, że ślad systemu na kwadryce jest pusty (stosujemy lemat z pracy Tomasza Lenarcika (Ann. Polon. Math. 101 (2011)));
- wyciągamy kwadrykę i rozważamy system rezydualny;
- **starannie zapisujemy wszystkie dane!**

Uwaga

Wykorzystujemy programy komputerowe do

- *postawienia odpowiedniej hipotezy o ograniczeniu na stopień d ;*

Szkic dowodu

Etapy dowodu głównego twierdzenia

- specjalizujemy proste i punkty z zygzaków na gładką kwadrykę;
- sprawdzamy, że ślad systemu na kwadryce jest pusty (stosujemy lemat z pracy Tomasza Lenarcika (Ann. Polon. Math. 101 (2011)));
- wyciągamy kwadrykę i rozważamy system rezydualny;
- **starannie zapisujemy wszystkie dane!**

Uwaga

Wykorzystujemy programy komputerowe do

- *postawienia odpowiedniej hipotezy o ograniczeniu na stopień d ;*
- *sprawdzania różnych **kroków redukcji**.*

Twierdzenie

Dla podschematu $W \subset \mathbb{P}^3$ składającego się z ogólnej prostej krotności m i ustalonej liczby r ogólnych prostych, zawężenie

$$H^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d)) \rightarrow H^0(W, \mathcal{O}_W(d))$$

ma maksymalny rząd dla wszystkich $d \geq d_0(m) = 3 \binom{m+1}{3}$.

Dla	ciąg długości	wynik
$B(k, 0, m)$	1	$B(k - 1, 1, m - 1)$
$B(k, 1, m)$	2	$B(k - 1, 0, m - 1)$
$B(k, 2, m)$	1	$B(k, 0, m - 1)$
$I(k, 0, m)$	2	$I(k - 2, 2, m - 2)$
$I(k, 1, m)$	1	$I(k - 1, 2, m - 1)$
$I(k, 2, 3\ell)$	$3\ell - 1$	$B(k - 2\ell + 1, 1, 1)$
$I(k, 2, 3\ell + 1)$	$3\ell + 1$	$B(k - 2\ell, 0, 0)$
$I(k, 2, 3\ell + 2)$	$3\ell + 1$	$B(k - 2\ell, 0, 1)$

Krok 1

- $\delta_1 = 1$
- $l_1 = 2k + 2 - m$
- $lz_1 = 0$
- $tz_1 = k + m(m - 1) - 1$

Krok p dla $2 \leq p \leq m - 2$

- $\delta_p = 1$
- $lz_p = \lfloor \frac{tz_{p-1} + 1}{2} \rfloor$
- $l_p = 2k + 2 - \lfloor \frac{p-1}{3} \rfloor - m - lz_p$
- $tz_p = k + pm(m - p) + \frac{1}{3}p(p - 1)(p + 1) - 2p + 1$
jeśli $p \not\equiv 0 \pmod{3}$
- $tz_p = pm(m - p) + \frac{1}{3}p(p - 1)(p + 1) - 2p + 2\frac{p}{3}$
jeśli $p \equiv 0 \pmod{3}$

Jeśli $m = 0, 2 \pmod 3$, Krok $m - 1$

- $\delta_p = 1$
- $l_p = 2k + 2 - \lfloor \frac{p-1}{3} \rfloor - m - lz_p + 1$
- $lz_p = \lfloor \frac{tz_{p-1} + 1}{2} \rfloor$
- $tz_p = 0$

Jeśli $m = 1 \pmod 3$, Krok $m - 1$

- $\delta_p = 1$
- $l_p = 2k + 2 - \lfloor \frac{p-1}{3} \rfloor - m - lz_p$
- $lz_p = \lfloor \frac{tz_{p-1} + 1}{2} \rfloor$
- $tz_p = pm(m - p) + \frac{1}{3}p(p - 1)(p + 1) - 2p + 2\frac{p}{3}$

Jeśli $m = 1 \pmod 3$, Krok m

- $\delta_p = 1$
- $l_p = 2k + 2 - \lfloor \frac{p-1}{3} \rfloor - m - lz_p + 1$
- $lz_p = \lfloor \frac{tz_{p-1} + 1}{2} \rfloor$
- $tz_p = 0$

thank
you!

Uwaga

Ograniczenie na stopień d podane w głównym twierdzeniu jest wymuszone faktem, że dla d odpowiednio dużego, pewne niezmienniki ideału Z mogą być dokładnie wypisane. Zatem możemy korzystać z indukcji.

Uwaga

Ograniczenie na stopień d podane w głównym twierdzeniu jest wymuszone faktem, że dla d odpowiednio dużego, pewne niezmienniki ideału Z mogą być dokładnie wypisane. Zatem możemy korzystać z indukcji.

Uwaga

Sprawdziliśmy (komputerem) setki przykładów i w żadnym przypadku nie znaleźliśmy "innej" funkcji Hilberta.

Przykład

W przestrzeni \mathbb{P}^4 pojawiają się specjalne przypadki. Najprostszy z nich to 1 podwójna prosta L i 2 zwykłe proste L_1 i L_2 . Suma hiperpowierzchni rozpiętych przez L i L_i znika podwójnie wzdłuż L i raz wzdłuż każdej z L_i , podczas gdy system ten jest niespodziewany.

Przykład

W przestrzeni \mathbb{P}^4 pojawiają się specjalne przypadki. Najprostszy z nich to 1 podwójna prosta L i 2 zwykłe proste L_1 i L_2 . Suma hiperpowierzchni rozpiętych przez L i L_i znika podwójnie wzdłuż L i raz wzdłuż każdej z L_i , podczas gdy system ten jest niespodziewany.

Uwaga

Przypuszczamy jednak, że z podobnym ograniczeniem jak w przypadku \mathbb{P}^3 , wartości funkcji Hilberta w \mathbb{P}^N mogą być wyznaczone w sposób dwuwielomianowy.