Klasyfikacja pewnych zbiorów geproci

Justyna Szpond
Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

Łódź, 8-12 stycznia, 2024

Założenie

Pracujemy nad ciałem charakterystyki zero.

Francesco Polizzi, mathoverflow, pytanie 67265

When is a general projection of d^2 points in $\mathbb{P}^3$ a complete intersection?

Ask Question

Asked 10 years, 11 months ago Modified 10 years, 11 months ago Viewed 550 times

8

5

It is well known that 4 general points in $\mathbb{P}^2$ are complete intersection of two conics. On the other hand, if $d \geq 3$, d^2 general points are *not* a complete intersection of two curves of degree d. More precisely, if $d=3$ there is only one cubic passing through 9 general points, whereas if $d \geq 4$ there is no curve of degree d passing through d^2 general points.

While investigating some questions about factoriality of singular hypersurfaces of $\mathbb{P}^n$, I ran across the following problem, which seems quite natural to state.

> Let $d \geq 3$ be a positive integer and let $Q \subset \mathbb{P}^3$ be a subset made of d^2 distinct points, with the following property: for a **general** projection $\pi \colon \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^2$, the subset $\pi(Q) \subset \mathbb{P}^2$ is the complete intersection of two plane curves of degree d.
>
> Is it true that Q itself is contained in a plane (and is the complete intersection of two curves of degree d)?
>
> If not, what is a counterexample?

Definicja

Niech $Z \subset \mathbb{P}^3$ *będzie zbiorem* $a \cdot b$ *punktów, gdzie* $a \leqslant b$. *Mówimy, że* Z *jest* (a, b)-geproci *jeśli dla dowolnego rzutowania na płaszczyznę* Π *z ogólnego punktu* P *obraz* Z *jest przecięciem transwersalnym dwóch krzywych w* Π, *jednej stopnia* a *i drugiej stopnia* b.

Definicja

Niech $Z \subset \mathbb{P}^3$ *będzie zbiorem* $a \cdot b$ *punktów, gdzie* $a \leqslant b$*. Mówimy, że* Z *jest* (a, b)-geproci *jeśli dla dowolnego rzutowania na płaszczyznę* Π *z ogólnego punktu* P *obraz* Z *jest przecięciem transwersalnym dwóch krzywych w* Π*, jednej stopnia* a *i drugiej stopnia* b*.*

W skrócie: GEneral PROjection is a Complete Intersection.

Definicja

Zbiór Z nazywamy (a, b)-kratą *jesli*

- *Z składa się z dokładnie ab punktów oraz,*
- $Z = A \cap B$,

gdzie A jest sumą $a \geqslant 2$ parami rozłącznych prostych oraz B jest sumą $b \geqslant a$ parami rozłącznych prostych takich, że każda prosta z A przecina każdą prostą z B w dokładnie jednym punkcie.

Definicja

Zbiór Z nazywamy (a, b)-kratą *jesli*

- *Z składa się z dokładnie ab punktów oraz,*
- *$Z = A \cap B$,*

gdzie A jest sumą $a \geqslant 2$ parami rozłącznych prostych oraz B jest sumą $b \geqslant a$ parami rozłącznych prostych takich, że każda prosta z A przecina każdą prostą z B w dokładnie jednym punkcie.

Uwaga

(a, b)-krata jest niezdegenerowana.

Definicja

Zbiór Z nazywamy (a, b)-kratą *jesli*

- *Z składa się z dokładnie ab punktów oraz,*
- *$Z = A \cap B$,*

gdzie A jest sumą $a \geqslant 2$ parami rozłącznych prostych oraz B jest sumą $b \geqslant a$ parami rozłącznych prostych takich, że każda prosta z A przecina każdą prostą z B w dokładnie jednym punkcie.

Uwaga

(a, b)-krata jest niezdegenerowana.

Uwaga

(a, b)-krata jest (a, b)-geproci. Jest to przecięcie dwóch (rozkładalnych) krzywych stopni a i b.

Twierdzenie (Giuffrida, Diaz, 1986)

Liczba punktów przecięcia dwóch nierozkładalnych krzywych $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^3$ stopni a i b, które nie leżą na jednej płaszczyźnie jest ograniczona z góry przez

$$(a-1)(b-1)+1.$$

Ponadto, maksymalna wartośc jest osiągana tylko wtedy, gdy krzywe leżą na tej samej kwadryce.

Twierdzenie (Giuffrida, Diaz, 1986)

Liczba punktów przecięcia dwóch nierozkładalnych krzywych $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^3$ stopni a i b, które nie leżą na jednej płaszczyźnie jest ograniczona z góry przez

$$(a-1)(b-1)+1.$$

Ponadto, maksymalna wartośc jest osiągana tylko wtedy, gdy krzywe leżą na tej samej kwadryce.

Uwaga

Zbiór punktów przecięcia 2 gładkich nierozkładalnych krzywych $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^3$ stopni a i b, które nie leżą na tej samej płaszczyźnie nie jest (a, b)-geproci.

Transactions of the American Mathematical Society, 2021

Levico Terme, 2018, workshop on Lefschetz Properties and Jordan Type in Algebra, Geometry and Combinatorics.

Alessadra Bernardi, Luca Chiantini, Graham Denham, Giuseppe Favacchio, Brian Harbourne, Juan Migliore, Tomasz Szemberg, J. Sz.

Transactions of the American Mathematical Society, 2021

Levico Terme, 2018, workshop on Lefschetz Properties and Jordan Type in Algebra, Geometry and Combinatorics.

Alessadra Bernardi, Luca Chiantini, Graham Denham, Giuseppe Favacchio, Brian Harbourne, Juan Migliore, Tomasz Szemberg, J. Sz.

Twierdzenie

System pierwiastkowy D_4 rozważany w przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^3$ jest $(3,4)$-geproci, który nie jest kratą.

Zbiór D_4 składa się z następujących punktów:

$$\begin{array}{lll}
(0:1:1:0) & (0:1:0:-1) & (0:0:1:1) \\
(1:0:1:0) & (1:0:0:-1) & (0:0:1:-1) \\
(1:1:0:0) & (1:0:0:1) & (0:1:0:1) \\
(0:1:-1:0) & (1:0:-1:0) & (1:-1:0:0).
\end{array}$$

Zbiór D_4 składa się z następujących punktów:

$$\begin{array}{lll} (0:1:1:0) & (0:1:0:-1) & (0:0:1:1) \\ (1:0:1:0) & (1:0:0:-1) & (0:0:1:-1) \\ (1:1:0:0) & (1:0:0:1) & (0:1:0:1) \\ (0:1:-1:0) & (1:0:-1:0) & (1:-1:0:0). \end{array}$$

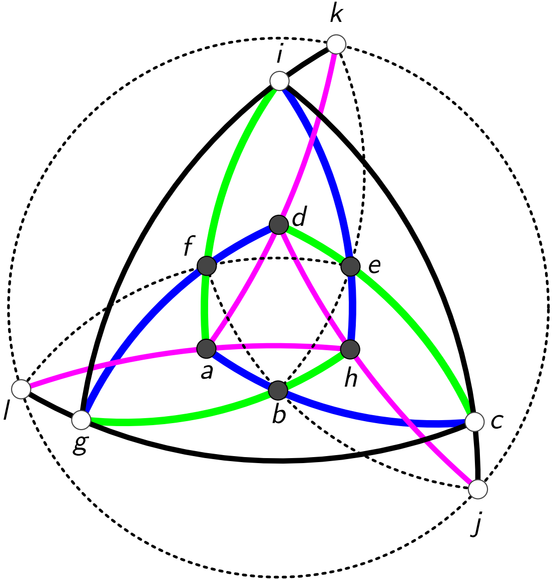
Zbiór D_4 leży na 4 rozłącznych prostych:

$$\begin{aligned} x &= y - z + w = 0 \\ y &= x - z + w = 0 \\ z &= x - y + w = 0 \\ w &= x + y + z = 0. \end{aligned}$$

Każda z nich zawiera po 3 punkty.

Definicja

Niezdegenerowany geproci zbiór Z *nazywamy* pół-kratą *jeśli rzut* Z' *zbioru* Z *z ogólnego punktu na płaszczyznę jest przecięciam transwersalnym dwóch krzywych płaskich, gdzie dokładnie jedną z nich może być suma prostych.*


k
i
d
f
e
a
h
l
b
c
g
j

Pytanie

Dla jakich par liczb naturalnych $a \leqslant b$ istnieje niezdegenerowany zbiór (a, b)-geproci w $\mathbb{P}^3$, który nie jest kratą?

Pytanie

Dla jakich par liczb naturalnych $a \leqslant b$ istnieje niezdegenerowany zbiór (a, b)-geproci w $\mathbb{P}^3$, który nie jest kratą?

Twierdzenie (POLITUS)

Istieje niezdegenerowany zbiór (a, b)-geproci w $\mathbb{P}^3$, który nie jest kratą wtedy i tylko wtedy, gdy

- $a = 3$ *i* $b = 4$ *albo;*
- $a \geqslant 4$ *(standard construction).*

Pytanie

Dla jakich par liczb naturalnych $a \leqslant b$ istnieje niezdegenerowany zbiór (a, b)-geproci w $\mathbb{P}^3$, który nie jest kratą?

Twierdzenie (POLITUS)

Istieje niezdegenerowany zbiór (a, b)-geproci w $\mathbb{P}^3$, który nie jest kratą wtedy i tylko wtedy, gdy

- $a = 3$ *i* $b = 4$ *albo;*
- $a \geqslant 4$ *(standard construction).*

Twierdzenie (POLITUS)

Niech Z będzie zbiorem $(3, 4)$-geproci. Wtedy

- *albo Z jest $(3, 4)$-kratą;*
- *albo Z jest D_4.*

Znane są tylko trzy takie przykłady:

- *konfiguracja* H_4, *zbiór* $(6, 10)$*-geproci (Paulina Wiśniewska, Maciej Zięba, 2021),*
- *konfiguracja Penrose'a, zbiór* $(5, 8)$*-geproci,*
- *tajemniczy zbiór* $(10, 12)$*-geproci.*

Problem

Sklasyfikować wszystkie niezdegenerowane zbiory $(4,4)$-geproci, które nie są kratami.

Problem

Sklasyfikować wszystkie niezdegenerowane zbiory $(4,4)$*-geproci, które nie są kratami.*

Podaliśmy pełną klasyfikację, przy dodatkowym założeniu, że zbiór $(4,4)$*-geproci jest pół-kratą.*

Twierdzenie (Klasyfikacja $(4,4)$-pół-krat, POLITUS, 2023)

Niech $Z \subset \mathbb{P}^3$ będzie $(4,4)$-pół-kratą. Wtedy, z dokładnością do rzutowej równoważności, Z jest albo

(a) *przypadek anharmoniczny*

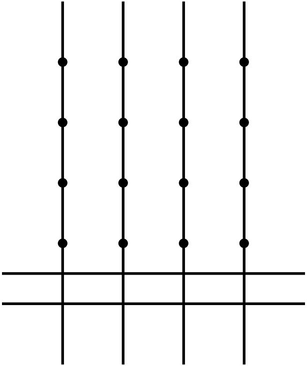
$$\begin{array}{llll}
(1:0:0:0), & (0:1:0:0), & (1:1:0:0), & (1:0:1:1), \\
(0:0:1:0), & (0:0:0:1), & (0:0:1:1), & (0:1:-1:0), \\
(1:0:1:0), & (0:1:0:1), & (1:1:1:1), & (1:1:0:1), \\
(1:0:\varepsilon:0), & (0:1:0:\varepsilon), & (1:1:\varepsilon:\varepsilon), & (\varepsilon:\varepsilon-1:1:\varepsilon),
\end{array}$$

gdzie ε jest prymitywnym pierwiastkiem z jedynki rzędu sześć, albo

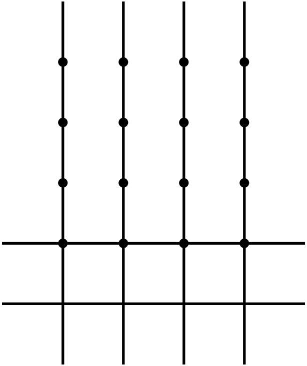
(b) *przypadek harmoniczny*

$$\begin{array}{llll}
(1:0:0:0), & (0:1:0:0), & (1:1:0:0), & (1:0:0:-1), \\
(0:0:1:0), & (0:0:0:1), & (0:0:1:1), & (0:1:1:0), \\
(1:0:1:0), & (0:1:0:1), & (1:1:1:1), & (1:1:1:-1), \\
(1:0:-1:0), & (0:1:0:-1), & (1:1:-1:-1), & (-1:1:1:1).
\end{array}$$

harmoniczny



anharmoniczny



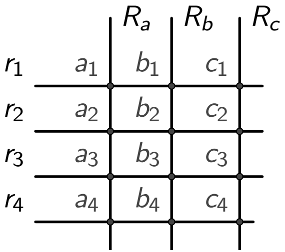
Szkic dowodu

Z jest $(4, 4)$-pół-kratą

Krok 1.

Niech $W \subseteq Z$ będzie zbiorem 4 współliniowych punktów (leżących na jednej z prostych). Wtedy $Z \setminus W$ jest zbiorem $(3, 4)$-geproci.

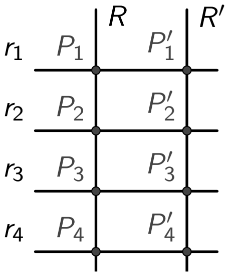
Ponieważ istnieją 4 współliniowe punkty w $Z \setminus W$, więc jest to $(3, 4)$-krata.

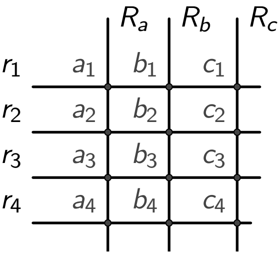


Lemat (Kwadryki i (2, 4)-kraty)

Niech $R, R' \subset \mathbb{P}^3$ *będą parą skośnych prostych. Niech* $P_1, \ldots, P_4$ *będzie zbiorem parami różnych punktów na* R *i niech* $P'_1, \ldots, P'_4$ *będzie zbiorem parami różnych punktów na* R'*. Niech* r_i *będzie prostą wyznaczoną przez punkty* $P_i P'_i$ *dla* $i = 1, \ldots, 4$*. Proste* $r_1, \ldots, r_4$ *są zawarte w kwadryce wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$j(P_1, P_2; P_3, P_4) = j(P'_1, P'_2; P'_3, P'_4).$$



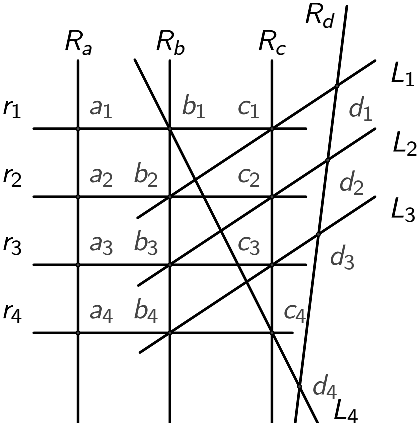


Wniosek

Ponieważ $r_1, \dots, r_4$ są zawarte w kwadryce, więc mamy

$$j(a_1, a_2; a_3, a_4) = j(b_1, b_2; b_3, b_4) = j(c_1, c_2; c_3, c_4).$$

Krok 2. Wybór innych prostych z pół-kraty.



Wymianiając R_a na R_d otrzymujemy pewną permutację β punktów na prostej R_b (nie identyczność). Zatem

$$j(d_1, d_2; d_3, d_4) = j(c_1, c_2; c_3, c_4) = j(b_{\beta(1)}, b_{\beta(2)}; b_{\beta(3)}, b_{\beta(4)}) = j(b_1, b_2; b_3, b_4).$$

Krok 3. Własności liniowych odwzorowań rzutowych na prostej rzutowej.

Własność 1.

Niech $P, Q, R, S \in \mathbb{P}^1$ i niech $f : \{P, Q, R, S\} \to \mathbb{P}^1$ będzie odwzorowaniem takim, że

$$j(P, Q; R, S) = j(f(P), f(Q); f(R), f(S)).$$

Wtedy f rozszerza się do odwzorowania rzutowego $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$.

Krok 3. Własności liniowych odwzorowań rzutowych na prostej rzutowej.

Własność 1.

Niech $P, Q, R, S \in \mathbb{P}^1$ i niech $f : \{P, Q, R, S\} \to \mathbb{P}^1$ będzie odwzorowaniem takim, że

$$j(P, Q; R, S) = j(f(P), f(Q); f(R), f(S)).$$

Wtedy f rozszerza się do odwzorowania rzutowego $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$.

Własność 2.

Jeśli $f_1, f_2 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ są rzutowymi liniowymi inwolucjami z dwoma punktami stałymi (te same), to $f_1 = f_2$.

Krok 3. Własności liniowych odwzorowań rzutowych na prostej rzutowej.

Własność 1.

Niech $P, Q, R, S \in \mathbb{P}^1$ i niech $f : \{P, Q, R, S\} \to \mathbb{P}^1$ będzie odwzorowaniem takim, że

$$j(P, Q; R, S) = j(f(P), f(Q); f(R), f(S)).$$

Wtedy f rozszerza się do odwzorowania rzutowego $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$.

Własność 2.

Jeśli $f_1, f_2 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ są rzutowymi liniowymi inwolucjami z dwoma punktami stałymi (te same), to $f_1 = f_2$.

Własność 3.

Jeśli $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ jest rzutowym liniowym odwzorowaniem z dokładnie jednym punktem stałym, wtedy wszystkie inne punkty w $\mathbb{P}^1$ mają nieskończone orbity.

Zastosowanie

- β rozszerza się do odwzorowania $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ skończonego rzędu.

Zastosowanie

- β rozszerza się do odwzorowania $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ skończonego rzędu.
- β ma punkty stałe na przecięciu R_b z transwersalami T_1 (i T_2, jeśli istnieje).

Zastosowanie

- β rozszerza się do odwzorowania $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ skończonego rzędu.
- β ma punkty stałe na przecięciu R_b z transwersalami T_1 (i T_2, jeśli istnieje).
- Muszą istnieć dwie transwersale, gdyż w przeciwnym przypadku β miałaby tylko jeden punkt stały, przy skończonych orbitach.

Krok 4.
Weźmy inną permutację γ, którą otrzymamy zaczynając od prostych R_a, R_b, R_d.

Wniosek

Albo β albo γ nie jest inwolucją (Własność 2).

Krok 4.
Weźmy inną permutację γ, którą otrzymamy zaczynając od prostych R_a, R_b, R_d.

Wniosek

Albo β albo γ nie jest inwolucją (Własność 2).

Wniosek

$j(a_1, a_2; a_3, a_4)$ musi być specjalne.

Krok 4.
Weźmy inną permutację γ, którą otrzymamy zaczynając od prostych R_a, R_b, R_d.

Wniosek

Albo β albo γ nie jest inwolucją (Własność 2).

Wniosek

$j(a_1, a_2; a_3, a_4)$ musi być specjalne.

- przypadek harmoniczny $(j(a_1, a_2; a_3, a_4) \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\})$,
- przypadek anharmoniczny $(j(a_1, a_2; a_3, a_4) \in \{\varepsilon, \overline{\varepsilon}\})$.

Krok 4.

Weźmy inną permutację γ, którą otrzymamy zaczynając od prostych R_a, R_b, R_d.

Wniosek

Albo β albo γ nie jest inwolucją (Własność 2).

Wniosek

$j(a_1, a_2; a_3, a_4)$ musi być specjalne.

- przypadek harmoniczny ($j(a_1, a_2; a_3, a_4) \in \{-1, \frac{1}{2}, 2\}$),
- przypadek anharmoniczny ($j(a_1, a_2; a_3, a_4) \in \{\varepsilon, \overline{\varepsilon}\}$).

Reszta dowodu to wybór odpowiednich współrzędnych i obliczenia.


thank you!