MATERIAŁY NA XXXVII KONFERENCJĘ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ

2016 **Łódź** **str. 35**

GEOMETRIA KWADRYKI - OD XIX DO XXI WIEKU

Michał Szurek (Warszawa)

1. Motywy, a raczej usprawiedliwienie. Nie pracuję naukowo od kilku lat i moja wiedza w zakresie specjalności, jaką była geometria algebraiczna, jest już nieco przedawniona. W artykule omawiam więc swoje wyniki z lat dziewięćdziesiątych. Ale nie te wyniki były motywacją do jego napisania, artykuł nie jest pracą naukową, a raczej esejem i odniesieniem do historii.

W latach dziewięćdziesiątych poprzedniego stulecia wszedłem na krótko, ale dość głęboko, w obszar historii matematyki. Nietypowo, było to związane z pracą badawczą o algebraicznych wiązkach wektorowych nad rozmaitościami Fano – do których należy i trójwymiarowa kwadryka $\mathbb{Q}_3$ w zespolonej przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}^4$. Okazało się, że moje (wspólne z Giorgio Ottavianim, [OSz]) wyniki z zakresu geometrii wiązek wektorowych dały się znacznie bardziej interesująco opisać, gdy „odkurzyliśmy" pewną pracę [Wil], dziś już osiemdziesięcioletnią. Napisałem wyżej, że to „nietypowe", bo na ogół przecież matematykę uprawiamy ahistorycznie, tak samo jej nauczamy (niestety, ale sądzimy, że tak trzeba), a Thomas S. Kuhn w swojej głośnej niegdyś książce *Struktura rewolucji naukowych*,[Ku], podniósł to do rangi dogmatu, powołując się zresztą na Whiteheada:

Po co czcić to, co dzięki najtrwalszym wysiłkom nauki udało się wyeliminować? Deprecjonowanie faktów historycznych jest głęboko i prawdopodobnie funkcjonalnie zakorzenione w ideologii zawodowej uczonych (...) Whitehead trafnie ujął to ahistoryczne nastawienie społeczności uczonych, kiedy pisał: „Nauka, która nie może się zdobyć na to, aby zapomnieć o swych założycielach, jest zgubiona". Nie miał jednak do końca racji, gdyż nauka, podobnie jak inne sfery zawodowej aktywności, potrzebuje bohaterów i zachowuje w pamięci ich imiona. Na szczęście uczeni, zamiast zapominać o tych bohaterach, potrafili zapomnieć o ich pracach lub je rewidować."

Pamiętajmy, że już Archimedes potrafił całkować – za pomocą metody wyczerpywania. Nie była to metoda dająca nadzieję na ogólność, ale być może następne pokolenia Starożytnych dałby sobie z tym radę..., gdyby istniało jakiekolwiek zapotrzebowanie społeczne na tego typu badania, jak to się stało w na początku XVII wieku.

2. Powrót do przyszłości. Najtrudniej jest oczywiście odtworzyć sposób myślenia naszych wielkich poprzedników i rzutować na teraźniejszość. Czy to jest w ogóle wykonalne? Pasjonująca lektura rozprawy doktorskiej (1883) Corrado Segre (1863-1924), [S], dała mi wiele do myślenia na ten temat.

Najpierw kilka definicji, współcześnie ujętych. Kwadryką $\mathbb{Q}_n$ będzie dla nas hiperpowierzchnia wymiaru n i stopnia 2, określona przez formę kwadratową symetryczną q_{ij}, a więc opisaną przez zera funkcji $\sum_{i,j=0}^{n+1} q_{ij}x_ix_j$ w przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}^{n+1}$ – nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Interesuje nas w zasadzie kwadryka gładka (nieosobliwa). Nad ciałem algebraicznie domkniętym (charakterystyki różnej od 2) każda nieosobliwa kwadryka jest liniowo równoważna ze zbiorem postaci $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} x_i^2 = 0$. W podstawowym kursie geometrii na studiach spotykamy się z kwadrykami w przestrzeni rzeczywistej, są to elipsoidy, paraboloidy i hiperboloidy. Jak zobaczymy dalej, bardziej właściwą analogią wielowymiarową jest nie sfera, a hiperboloida jednopowłokowa.

Przenieśmy się do lat osiemdziesiątych dziewiętnastego wieku. Zdajmy sobie sprawę, że po pierwsze, nie było jeszcze wtedy teorii mnogości (w dzisiejszym sensie). Nie istniała algebra liniowa (taka, jak ją znamy dzisiaj) – jej powstanie (ok. 1900 roku) przypisują sobie zarówno Niemcy, jak i Włosi. Mało tego, „nie było” zasady indukcji matematycznej, tej jedynej reguły logicznej, która nieznana była średniowiecznym uczonym. Dzisiejszy formalizm (początek indukcji, założenie, krok indukcyjny) zastępowano prostym „i tak dalej”. I jakoś szło. Niemal rówieśnikiem Corrado Segrego (dokładniej: od dwa lata starszy) był Alfred Whitehaed, a Bertrand Russel był o osiem lat młodszy. Na ich *Principia Mathematica* czekać przyszło jeszcze ćwierć wieku. Nikomu nie przychodziło do głowy, by definiować matematykę jako naukę o zdaniach postaci $a \Rightarrow b$. Pewniki Euklidesa znano oczywiście od dwóch tysiącleci, ale aksjomatyczne ujęcie matematyki jeszcze się nie upowszechniło. Sądzę, że żaden wykładowca nie był wtedy w stanie zażartować tak, jak ja to niekiedy robię na wykładzie algebry: jeżeli w zbiorze krzeseł na sali określę odpowiednio działania, to ten zbiór może być ciałem (a pierścieniem na pewno) – to wszystko jest kwestią spełnienia odpowiednich aksjomatów.

Z przykrością odkrywam, że obserwowany spadek obecnego poziomu nauczania matematyki objawia się również i w tym, że studenci studiów typu politechnicznego (z którymi mam do czynienia od 15 lat) coraz gorzej przyswajają sobie pojęcia abstrakcyjne. Bardzo trudno jest im pojąć liczby zespolone, aksjomatykę przestrzeni liniowej, grup itp. Co gorsza, nie rozumieją pojęcia dowodu matematycznego. Ale wracajmy do geometrii kwadryki.

3. Czy Corrado Segre zdałby dzisiaj egzamin z algebry liniowej? Ten przydługi wstęp był po to, by łatwiej zrozumieć trudności, jakie miał 20-letni Corrado z samym określeniem przestrzeni liniowej (a potem: rzutowej). W moim (M.Sz.) przekładzie brzmi ono tak:

Mówimy, że zbiór ciągły dowolnych jednostek, których liczba jest równa m razy nieskończoność (to znaczy, ogólnie, wśród których znajduje się skończona ich liczba spełniających m prostych warunków) tworzy przestrzeń wymiaru m, a obiekty te nazywamy elementami.

A następnie: *Dowolną przestrzeń wymiaru m nazwiemy liniową, gdy można każdemu jej elementowi przypisać wartości liczbowe (rzeczywiste lub zespolone) w ten sposób, że, bez żadnego wyjątku, dowolnej grupie wartości o których mowa odpowiada jedyny element rzeczonej przestrzeni i vice versa, każdemu elementowi odpowiada jedyna taka grupa wartości. Te wartości odpowiadające elementom nazywamy współrzędnymi.*

Nic dziwnego, że określenia te zaopatrzone zostały notą redakcyjną, że mają *carattere critico*, ale – i to ciekawe – że jest to bez znaczenia, bo w dalszym ciągu pracy te określenia są w zasadzie nie używane. Szczególnie pierwsze określenie, przestrzeni wymiaru m wydaje się bardzo niedoskonałe (cóż są to „proste warunki" ?) a nawet błędne. Wydaje się jednak, że w zdaniu w nawiasie Segre próbuje oddać istotę dzisiejszego pojęcia bazy przestępnej. Nieprzywiedlny zbiór algebraiczny X jest wymiaru m nad ciałem K, gdy ciało funkcji wymiernych $K(X)$ jest skończonym rozszerzeniem ciała funkcji wymiernych m zmiennych $K(x_1, x_2, ..., x_m)$. Na przykład zbiór określony równaniem $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ w przestrzeni afinicznej jest wymiaru 3, bo są na nim trzy i tylko trzy niezależne algebraicznie funkcje np. x_1, x_2, x_3. W świetle późniejszego (1926) twierdzenia Emmy Noether o normalizacji jest to prawidłowa definicja.

Zatem... nie zmylił się mistrz taki [KJ]. Matematyka w pracy Segrego jest dojrzała, nawet w świetle naszych, obecnych standardów. On po prostu rozumiał pojęcia i wiedział, co jest matematyką ... i nie musiał precyzować definicji. Jak doskonale wiemy, w rozwoju matematyki zdarzało się wiele razy, że dobrze rozumiano pewne teorie, zanim ktoś uporządkował ich logiczne podstawy (teoria liczb zespolonych, rachunek różniczkowy). Warto też przytoczyć fragment, w którym autor (tzn. Corrado Segre) jak gdyby tłumaczy silnie akcentowaną potem przez Bertranda Russella, a dla nas dziś oczywistą opinię, że badaniach matematycznych nie jest ważna natura badanych obiektów, a tylko jakie zachodzą między nimi relacje:

Rozważmy dowolną przestrzeń (...) . Nazwiemy punktem każdy z jej elementów, niezależnie od tego, jaką ma naturę (która jest dla nas zupełnie nieważna).

Pierwszą historycznie książką, w której można znaleźć ślady pojęcia przestrzeni liniowej jest książka Bernarda Bolzano *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* (1804). Dobrze rozumiał to pojęcie Herrmann Grassmann (1809-1877), którego idee wyprzedzały jego czas i zostały docenione dopiero po wielu latach [D]. Obecna definicja przestrzeni liniowej pochodzi, jak się wydaje, od Giuseppe Peano [P]. Około 1900 roku można już mówić o ugruntowaniu się teorii przestrzeni liniowych w sensie znanym nam dzisiaj.

4. Matematyka bez teorii mnogości? Segre używał terminu *insieme* (zbiór), rozumiejąc go w „naturalny”, intuicyjny sposób, jak wszyscy aż do zmiany paradygmatu, dokonanego za sprawą Cantora. Nie podejrzewano, że istnieje wiele rodzajów nieskończoności a symbol taki, jak ∞^2, podwójna nieskończoność, był dla każdego zrozumiały. Tytuł jednej z późniejszych prac Segrego: *Introduzione alla geometria sopra una ente algebraico semplicemento infinito*, (Annali di matematica pura e applicata, 1894, serie II, tomo XXII, s. 41-142) będzie niezrozumiały, dopóki nie przeczytamy, że *una varieta semplicemente infinita* (rozmaitość nieskończona w sposób prosty) to po prostu krzywa (*curva*), zaś *doppiamente infinita* (czyli podwójnie nieskończona) to powierzchnia. Segre pisze wiele razy „znajdźmy liczbę przestrzeni o takich a takich własnościach” i podaje odpowiedź w postaci: ∞^k – niekiedy to oznaczenie da się zobaczyć i dziś na wykładzie włoskiego matematyka. Wreszcie – rzecz ciekawa, polem (ciałem), nad którym wszystkie rozmaitości były określone, nie było bynajmniej $\mathbb{C}$, ale zbiór liczb algebraicznych. Liczbami przestępnymi nikt się specjalnie nie przejmował – ważna była algebraiczna domkniętość ciała. Jak pamiętamy, dopiero w 1844 roku Joseph Liouville odkrył istnienie liczb przestępnych, przestępność π udowodnił Ferdinand von Lindemann w 38 lat później, to jest w 1882 r., a metody holomorficzne w geometrii algebraicznej to rzecz znacznie późniejsza.

5. Zapomniany trop. Segre używa z pozoru dziwnego oznaczenia S'_n na przestrzeń liniową (rozumianą tu jako „coś płaskiego”: prostą rzutową, płaszczyznę, itd., a więc zanurzone $\mathbf{P}^k$.) Oznaczenie to wydaje się być śladem dawnego, zapomnianego podejścia do definicji $\mathbf{P}^n(K)$. Jak doskonale wiemy, przestrzenią rzutową (wymiaru n) nad ciałem K nazywamy w algebrze zbiór ciągów $(n+1)$-elementowych tego ciała, z pominięciem ciągu zerowego i z utożsamieniem ciągów proporcjonalnych. Przy takim podejściu zapominamy o „pochodzeniu” tego pojęcia: punkty w nieskończoności przestrzeni rzutowej odpowiadają kierunkom linii prostych przestrzeni afinicznej. Natomiast zapomniana jest dzisiaj inna „algebraiczna” interpretacja przestrzeni rzutowej, wykorzystywana w „złotym okresie” włoskiej geometrii algebraicznej, który zaczął się około 1875 roku. Mianowicie: $\mathbf{P}^n = S^n(\mathbf{P}^1)$. Przestrzeń rzutowa wymiaru n jest n-tą potęgą symetryczną prostej. Co to znaczy? Rozpatrzmy najpierw nieuporządkowaną n-tkę punktów prostej afinicznej $\mathbb{C}^1$, tj. liczb a_1, a_2 , ..., a_n. Utwórzmy wielomian

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n) =$$

$$= x^n - \sigma_1(a_1,a_2,\ldots,a_n)x^{n-1} + \sigma_2(a_1,a_2,\ldots,a_n)x^{n-2} + \ldots \pm \sigma_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)\,,$$

gdzie σ_1, σ_2, ..., σ_n są bazowymi wielomianami symetrycznymi n zmiennych. Odwrotnie, mając wielomian, rozłożymy go na czynniki i wyznaczymy nieuporządkowaną n-tkę liczb, czyli punktów prostej. W nieskomplikowany sposób poradzimy sobie teraz z dołączeniem ∞, to znaczy z prostą $\mathbf{P}^1 = \mathbb{C}\cup\infty$. Na przykład układowi 1, 2, 3 , ∞ odpowiada wielomian $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3)$ – można mu przypisać punkt $\{0, 1, -6, 11, -6\}$ w zwykłym układzie współrzędnych jednorodnych. Inaczej mówiąc, możemy traktować przestrzeń rzutową $\mathbf{P}^n$ jako zbiór

n-tek punktów na prostej oraz jako zbiór wielomianów (jednej zmiennej) stopnia n. Wielomiany stopni mniejszych niż n odpowiadają wówczas punktom w nieskończoności a równoważność tego modelu ze standardowym zapewniają wzory Viete'a (i zasadnicze twierdzenie algebry!) Zamiast wielomianów jednej zmiennej różnych stopni możemy oczywiście używać wielomianów jednorodnych dwóch zmiennych i „jednorodnej" wersji zasadniczego twierdzenia algebry: każdy wielomian jednorodny dwóch zmiennych x, y (dodatniego stopnia) jest iloczynem wielomianów liniowych $ax + by$.

6. Spazi lineari contenuti in una quadrica o tangenti ad essa. Przestrzenie liniowe zawarte w kwadryce lub styczne do niej. Najciekawszym rozdziałem pracy doktorskiej (diploma di laurea) 20-letniego Corrado Segrego jest fragment o prostokreślności kwadryki, czyli o tym, ile k-płaszczyn (tj. rzutowych $\mathbf{P}^k$ jest zawartych w nieosobliwej kwadryce $\mathbb{Q}_n$. Zacznijmy od zrozumienia sytuacji na rzeczywistej hiperboloidzie jednopowłokowej. Ma ona dwa systemy tworzących: różne proste jednego z tych systemów nie przecinają się, natomiast dwie proste należące różnych systemów mają jeden punkt wspólny. Jeżeli przez ℓ i ℓ' oznaczymy ogólne proste tych systemów, to na kwadryce $\mathbb{Q}_2$ mamy relacje: $\ell^2 = \ell'^2 = 0, \ell \cdot \ell' = 1$. Dzisiaj widzimy to jako strukturę pierścienia Chow lub pierścienia kohomologii kwadryki trójwymiarowej, $H^*(\mathbb{Q}_3, \mathbb{Z})$. Chodzi o formułę, jak przecinają się podrozmaitości danej rozmaitości. Na kwadryce dwuwymiarowej jest tak, jak na hiperboloidzie jednopowłokowej: proste z jednego systemu tworzących nie przecinają się ze sobą, proste z różnych systemów mają jeden punkt wspólny.

Twierdzenie. Gładka kwadryka $\mathbb{Q}_n$ wymiaru n nie zawiera podprzestrzeni liniowych wymiaru większego niż $\frac{n}{2}$. Wymiar rodziny wszystkich m-płaszczyn zawartych w takiej kwadryce jest równy

$$d(n, m) = (m + 1)(n - m + 1) - \frac{(m + 1)(m + 2)}{2}\,.$$

Można łatwo zobaczyć podprzestrzenie możliwie największego wymiaru, tj. $\lfloor n \rfloor$. Przy okazji zrozumiemy drobną różnicę między kwadrykami parzystego i nieparzystego wymiaru. Równanie $\sum\limits_{i=0}^{n+1} x_i^2 = 0$ może być oczywiście zmienione do jednej z postaci

$$x_0x_1 + x_2x_3 + \ldots x_nx_{n+1} = 0\ \ ,\ x_0^2 + x_1x_2 + \ldots x_nx_{n+1} = 0\,,$$

w zależności od parzystości n. Gdy n jest liczbą parzystą, wtedy w pierwszym napisanym powyżej równaniu bierzemy $x_0 = x_2 = x_4 = \ldots = x_n = 0$, pozostałe zmienne mogą przyjmować dowolne wartości, wypełniają zatem przestrzeń rzutową $\mathbf{P}^{n/2}$. Oczywiście i dualnie, możemy wziąć $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{n+1} = 0$, pozostałe zmienne przyjąć dowolnie. W przypadku nieparzystego n bierzemy oczywiście $x_0 = 0$ i potem zerujemy co drugą zmienną. Oczywiście nie są to wszystkie możliwe płaskie podprzestrzenie największego wymiaru.

Zanim jednak zobaczymy, jak się to interesująco dowodziło i dowodzi, pobawmy się funkcją $d(n,m)$, wykorzystując bezrozumne elektroniczne urządzenia liczące, które tak rozpanoszyły się w naszym dwudziestym pierwszym wieku. Rozpatrzmy kwadrykę wymiaru 33 (dlaczego taką? – a dlaczego nie?). Program *Mathematica* wyrzuci momentalnie

$$\texttt{In}[1] := \texttt{n} = 33; \texttt{Table}[\texttt{d}[\texttt{n},\texttt{m}],\texttt{m},1,\texttt{Floor}[\texttt{n}]]$$

$$Out[1] = \{63, 90, 114, 135, 153, 168, 180, 189, 195, 198, 198, 195, 189, 180, 168, 153\}\,.$$

Co w tym nadzwyczajnego? No, może i nic. Ale popatrzmy na wymiary: od wymiaru 5 do 16 mamy dualność - podprzestrzeni liniowych wymiaru 5 na kwadryce 33-wymiarowej jest tyle samo ile 16-wymiarowych, sześciowymiarowych tyle, ile 15-wymiarowych i tak dalej. Tylko dla wymiarów kwadryki podzielnych przez 3 występuje coś podobnego. Nietrudno to sprawdzić, to jest zadanie na ekstremum funkcji kwadratowej! Warianty tego zadania mogą być chyba przydatne w OM. Ale taka koincydencja „musi" mieć podłoże geometryczne. Jakie? Nie jest to zadanie w stylu matematyki dwudziestego pierwszego wieku, ale po pierwsze: może i coś ciekawego tu się da zobaczyć, po drugie – odkryłem to naprawdę bawiąc się komputerem.

Zobaczmy, jak wzoru na liczbę podprzestrzeni dowodzi Segre i porównajmy z późniejszym o 85 lat tekstem [Griffiths, Harris, rozdz. 6.1]. Najpierw Segre (1883); S'_m będzie oznaczać taką m-płaszczyznę. Zachowajmy styl wypowiedzi i oznaczenia, które wydają się nam dzisiaj po prostu niewygodne, zaciemniające tok wywodu, ale oddające „ducha". W szczególności n nie jest wymiarem kwadryki φ, a liczbą współrzędnych $x_1, x_2, ..., x_n$ w stosownej przestrzeni rzutowej; kwadryka jest zatem wymiaru $n-2$. Segre pisze mniej więcej tak (przekład mój, M.Sz.) :

Dla $m \leqslant (n-2)/2$ łatwo jest zobaczyć, że kwadryka φ istotnie zawiera nieskończenie wiele S'_m. Weźmy dowolny punkt x należący do φ i dowolny punkt x' z przecięcia płaszczyzny stycznej z φ. Prosta S'_1 łącząca x' z x jest zawarta w φ. Płaszczyzna styczna do φ w punkcie x' przechodzi przez x i przecina płaszczyznę styczną w x wzdłuż c, zawierającej owo S'_1; następnie bierzemy poza nią nowy punkt x'' należący do φ i łączymy go za pomocą S'_1 z x' . Otrzymujemy S'_2 całkowicie zawarte w φ i przechodzące między innymi przez punkty x, x', x''. Płaszczyzna styczna do φ w punkcie x'' przecina S'_{n-3} wzdłuż S'_{n-4} (przecięcie płaszczyzn stycznych w x, x', x'') zawierającej S'_2 . W części wspólnej takiej S'_{n-4} z φ, znajdujemy nowy punkt x''' poza S'_2 i łączymy go z S'_2 za pomocą S'_3, która zawiera x, x', x'', x'''. Kontynuując, otrzymujemy przestrzenie liniowe zawarte w φ, rosnących wymiarów. Chcemy rozpatrywać, ogólnie, liczbę takich S'_m, które przechodzą przez daną S'_k. zawartą w φ, oczywiście pod warunkiem, że $k < m$. Zauważmy, że w tej poprzedniej konstrukcji punkt x' możemy wybrać na ∞^{n-2} sposobów, punkt x' z przecięcia z płaszczyzną styczną w x można wybrać na ∞^{n-3} sposobów, punkt x'' z przecięcia z płaszczyznami stycznymi w x i x' można wybrać na ∞^{n-4} sposobów, ... , punkt $x^{(k)}$ na ∞^{n-2-k} sposobów, ... , i wreszcie punkt $x^{(m)}$ na ∞^{n-2-m} sposobów.

Punkty x, x', x'', $\ldots$, $x^{(k)}$ wyznaczają daną przestrzeń zawartą w φ, a zaś łącznie z punktami $x^{(k+1)}$, ... , $x^{(m)}$ wyznaczają S'_m, zawartą całkowicie w φ i przechodzącą przez ową S'_k.

Pierwsze punkty można wybrać na

$$\infty^{n-2-k-1} \cdot \infty^{n-2-k-2} \cdot \infty^{n-2-m} = \infty^{(m-k)(2n-m-k-5)/2}$$

sposobów. Tę liczbę trzeba podzielić przez $\infty^{(m-k)m}$, ponieważ punkty $x^{(k+1)}$, ... , $x^{(m)}$, jako dowolne punkty S'_m można wybrać na $\infty^{(m-k)m}$ sposobów.

Otrzymujemy wynik, że przez daną S'_k na kwadryce przechodzi

$$\infty^{(m-k)(2n-3m-k-5)/2}$$

zawartych w niej S'_m.

Bezpośrednio stąd wynika, że na całej kwadryce jest $\infty^{(m+1)(2n-3m-4)/2}$ takich S'_m, ponieważ jest ∞^{n-2} punktów x, z których ∞^m należy do S'_m.

Tu sprawa podwójnie ciekawa, Segre podaje jeszcze dwa inne dowody tego faktu – dzisiaj w pracy naukowej nikt by tak nie zrobił. Ponadto, czyni to po to, by „ostatecznie potwierdzić" uzyskany wynik - jak w sądzie: im więcej dowodów, tym mocniej ugruntowana teza. Zobaczmy jeden z tych dowodów (wzoru o liczbie podprzestrzeni liniowych w kwadryce). Przytoczony wyżej dowód Segre nazywa syntetycznym, poniższy: analitycznym. Oto tekst Segrego (w moim tłumaczeniu):

Możemy teraz znaleźć analitycznie liczbę przestrzeni S'_m zawartych w φ, co będzie służyć potwierdzeniu omawianych zagadnień. Niech x, x',..., $x^{(n)}$ będzie układem $n{+}1$ punktów, które wyznaczają S'_m. Aby cała ta przestrzeń była zawarta w φ, dla dowolnych wartości λ musi zachodzić

$$\varphi(\lambda x + \lambda' x' + \ldots + \lambda^{(m)} x^{(m)}) = 0\,,$$

stąd

$$\lambda^2 \varphi(x) + \lambda'^2 \varphi(x') + \ldots + \lambda^{(m)2} + 2\lambda\lambda' \varphi(x, x') + \ldots = 0\,,$$

a zatem jest

$$\varphi(x) = \varphi(x') = \ldots = \varphi(x^{(m)}) = \varphi(x, x') = \ldots = \varphi(x^{(m-1)}, x^{(m)}) = 0\,.$$

Równania te występują w liczbie $(m{+}1)(m{+}2)/2$ i wyrażają fakt, że $m{+}1$ punktów x, x',..., $x^{(m)}$ leży na φ a także, że są parami sprzężone względem φ, czyli są w płaszczyznach stycznych do φ - zgodnie z rezultatami rozważań syntetycznych. Ponieważ punkty x, x',..., $x^{(m)}$ możemy wybrać w dowolny sposób na szukanej S'_m, musimy zatem nałożyć m warunków i w ten sposób mamy $(m+1)(m+2)/2 + m(m+1)$ równań, podczas, gdy liczbą niewiadomych (są nimi współrzędne punktów) jest $(m+1)(n+1)$. Zatem układ jest nieoznaczony

$$(m+1)\big((n-1) - (m+2)/2\big) = (m+1)(2n-3m-4)/2$$

razy, innymi słowy, kwadryka φ zawiera $\infty^{(m+1)(2n-3m-4)}$ przestrzeni S'_m, jak to już widzieliśmy wcześniej.

Tyle Segre. Współczesny recenzent kazałby to napisać inaczej. Najpierw obliczamy, że rozwiązania układu $(m+1)(m+2)/2$ równań z $(m+1)(n-1)$ niewiadomymi tworzą zbiór wymiaru równemu różnicy liczby niewiadomych i liczby równań – w Polsce nazywa się to arbitralnie twierdzeniem Kroneckera-Cappelli – a potem od tego trzeba odjąć wymiar grupy automorfizmów.

Uff! Jak tego dowodzą Griffiths i Harris (1978), [GH]? W ich rozumowaniu występują dwa charakterystyczne motywy: po pierwsze „uzmienniamy” nie tylko k-płaszczyznę na danej kwadryce, ale i całą kwadrykę. Rozpatrujemy zbiór wszystkich kwadryk $\mathbf{F}$. Widzimy wszystko dynamicznie, wszystko się rusza i zmienia. Wróćmy też do współczesnych oznaczeń, niech n będzie wymiarem kwadryki. Ponieważ wymiar przestrzeni form kwadratowych $n+2$ zmiennych jest równy

$$q_n = \frac{(n+2)(n+3)}{2},$$

zatem kwadryk w $\mathbf{P}^{n+1}$ jest $\dim \mathbf{F} = \frac{(n+2)(n+3)}{2} - 1$.

Drugim charakterystycznym motywem rozumowania jest rozpatrywanie *zbioru incydencji*. W naszym kontekście jest to zbiór złożony z par $(\mathbb{Q}, P)$, gdzie $\mathbb{Q} \in \mathbf{F}$ jest kwadryką, a $P \subset \mathbb{Q}$ jest k-płaszczyzną. Możemy traktować P jako element Grassmannianu $G = G(k, n+1)$. Musimy wiedzieć, że zbiór incydencji, jak i Grassmannian, ma strukturę algebraiczną i $\dim \operatorname{Grass}(k, n+1) = (k+1)(n-k+1)$. Niech $\mathbf{I}$ będzie zbiorem incydencji. Mamy dwa naturalne rzutowania:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1 & \\ \mathbf{I} & \longrightarrow & \mathbf{F} \\ \pi_2 \downarrow & & \\ \mathbf{G} & & \end{array}.$$

Wymiar przestrzeni, o który nam chodzi, to wymiar włókna ogólnego odwzorowania π_1. Obliczamy inne wymiary. Form kwadratowych $k+1$ zmiennych jest $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, zatem wymiar włókna rzutowania π_2 jest równy różnicy

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1.$$

Suma tej liczby i wymiaru bazy, na którą się rzutuje, to znaczy $\mathbf{G}$, jest wymiarem zbioru incydencji, tzn. $(k+1)(n-k+1) + \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1$. Poszukiwany wymiar rodziny wszystkich k-płaszczyzn na kwadryce wymiaru n jest zatem równy różnicy

$$\dim \mathbf{I} - \dim \mathbf{F} = (k+1)(n-k+1) - \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Pozostawiamy Czytelnikowi sprawdzenie, że wynik zgadza się z wcześniejszym wynikiem Segrego, a różnica polega tylko na oznaczeniach.

Oddajmy znowu głos Segremu – dowodzi on w jeszcze jeden sposób wzoru na liczbę płaskich podrozmaitości na kwadryce, a czynią to za pomocą wielce potem efektywnej metody rzutowania środkowego. Otóż wybierzmy (hiper)płaszczyznę H i punkt na kwadryce, ale poza H, $p \notin H$ i rzutujmy kwadrykę na H z tego punktu. Odzworowanie jest wzajemnie jednoznaczne poza przecięciem hiperpłaszczyzny stycznej do kwadryki, wyprowadzonej z punktu p, z tą kwadryką i to jest podstawą do rozumowań indukcyjnych.

7. Kwadryka Kleina po staremu i po nowemu. Jak mówi nie całkiem niepoważna *zasada Arnolda*, żadne pojęcie matematyczne nie jest nazwane nazwiskiem rzeczywistego odkrywcy. Nie inaczej jest ze współrzędnymi Plückera, kwadryką Kleina itp. Wszystko to powinno być oddane Grassmannowi (Hermann Günther Grassmann, szczecinianin, 1809-1877). Zauważmy najpierw, że dzięki dualizmowi zawartemu w równaniu linii prostej na płaszczyźnie rzutowej

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0,$$

zbiór linii prostych zawartych w $\mathbf{P}^2$ ma naturalną strukturę rozmaitości algebraicznej, izomorficznej z tą samą płaszczyzną a zwanej w tym kontekście przestrzenią dualną do $\mathbf{P}^2$, oznaczaną jako $\mathbf{P}^{2\star}$. Widzimy poza tym, że wybór izomorfizmu między płaszczyzną, a płaszczyzną do niej dualną jest wyznaczony przez wybór nieosobliwej formy kwadratowej, czyli stożkowej gładkiej.

Zbiór linii prostych, leżących w $\mathbf{P}^3$ ma trochę bardziej skomplikowaną strukturę, ma naturalną strukturę kwadryki w przestrzeni pięciowymiarowej. Najprościej przekonać się o tym tak. Niech $a = [a_0, a_1, a_2, a_3]$ i $b = [b_0, b_1, b_2, b_3]$ będą dwoma punktami przestrzeni. Wtedy zespół wyznaczników $P(a, b) =$

$$= \left[\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right]$$

wyznacza pewien punkt przestrzeni $\mathbf{P}^5$, niezależny od wyboru punktów a, b na ustalonej prostej $\ell \subset \mathbf{P}^3$. Jeżeli te wyznaczniki oznaczymy kolejno przez p_{ij}, to mamy zależność

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0\,.$$

A zatem zbiór linii prostych przestrzeni trójwymiarowej $\mathbf{P}^3$ ma naturalną strukturę czterowymiarowej kwadryki w $\mathbf{P}^5$. To wiedział już Grassmann, ale dzisiaj nazywamy ją („zasada Arnolda"!) kwadryką Kleina.

Czy wszyscy znają ten niesamowity dowód niewymierności liczby $\sqrt[n]{2}$ dla $n \geqslant 3$? Przypuśćmy, że $p^n = 2q^n$ przy całkowitych i niezerowych p, q. Napiszmy prawą stronę w postaci $q^n + q^n$ i skorzystajmy z WTF! Okropne, prawda? Nieco podobnie jest z współczesnym (chociaż jeszcze dwudziestowiecznym) dowodem tego, że zbiór linii prostych w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbf{P}^3$ ma naturalną strukturę kwadryki. Wybieramy w tym celu stabilną wiązkę wektorową $\mathcal{E}$ rangi 2 na $\mathbf{P}^3$ o klasach Cherna $c_1 = -1$, $c_2 = 1$. Z teorii Mori (Shigefumi Mori, Fields 1990) wynika, że projektywizacja wiązki $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(1)$ ma dwa rzutowania: „pionowe" na bazową $\mathbf{P}^3$ i „poziome" na $\mathbb{Q}_4$. Przy projektywizacji linie proste w $\mathbf{P}^3$ „podnoszą się" izomorficznie do linii prostych. Teoria Mori mówi, że co w pierwszym rzutowaniu jest podnoszone izomorficznie, przy drugim rzutowaniu jest ściągane do punktu. To daje omawianą odpowiedniość między punktami kwadryki a liniami prostymi w $\mathbf{P}^3$. Szczegóły są mocno skomplikowane i może porównanie z tym nieco kuglarskim (choć przecież logicznie poprawnym) dowodem niewymierności liczby $\sqrt[n]{2}$ nie jest właściwe.

I jeszcze jeden „powrót do przyszłości". Systemem liniowym prostych w $\mathbf{P}^3$ nazywamy zbiór linii prostych odpowiadający części wspólnej kwadryki Kleina i hiperpłaszczyzny (wymiaru 4) w $\mathbf{P}^5$. Nietrudno podać pełną klasyfikację takich systemów. We współrzędnych Plückera równaniem systemu liniowego jest

$$\sum a_{ij} p_{ij} = 0\,,$$

gdzie $J = [a_{ij}]$ jest macierzą skośnie symetryczną. Systemy liniowe są rozróżnialne za pomocą współczynnika oznaczanego tradycyjnie przez Ω :

$$\Omega = 2(a_{01}a_{23} - a_{02}a_{31} + a_{03}a_{12})\,.$$

Gdy $\Omega \neq 0$, to system nazywa się ogólny. Systemy mające $\Omega = 0$ są szczególne. Analiza systemów szczególnych nie jest wcale zamkniętą kartą. Ale przypatrzmy się ogólnym. Macierz skośnie symetryczna J o niezerowym wyznaczniku określa interesującą algebraiczną wiązkę wektorową, zwaną wiązką korelacji zerowej. Najpierw (ćwiczenie dla studentów pierwszego roku) przekonajmy się, że taka macierz musi mieć parzystą liczbę wierszy (i kolumn). Wiemy z kursu algebry liniowej, że nie ma naturalnego izomorfizmu przestrzeni na przestrzeń do niej dualną – zawsze czymś się trzeba podeprzeć, iloczynem skalarnym albo stożkową. Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru 4, z której przez projektywizację powstaje trójwymiarowa przestrzeń rzutowa $\mathbf{P}^3$. Zauważmy najpierw, że :

Ogólny system liniowy wyznacza korelację zerową, tzn. izomorfizm $i : V \to V^*$ taki, że dla każdego $x \in \mathbb{Q}_4$ mamy $x \in i(x)$. Istotnie, $x^T J x = (x^T J x)^T = x^T J^T x = -x^T J x$, a zatem $x^T J x = 0$, czyli $x \in x^T J$.

Z kolei korelacja zerowa wyznacza interesującą wiązkę wektorową rangi 2 na przestrzeni rzutowej $\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}^3$, zwaną właśnie wiązką korelacji zerowej (null correlation bundle). Jej włóknem w punkcie x jest przestrzeń ilorazowa $V/i(x)$. Bardziej dokładne określenie tej wiązki jest następujące. Jeżeli Ω jest wiązką kostyczną na $\mathbf{P}^3$, to przekroje $\Omega \otimes \mathcal{O}(2)$ są w naturalnej odpowiedniości z macierzami antymetrycznymi 4×4 – wybór macierzy nieosobliwej wyznacza zanurzenie wiązki trywialnej w $\Omega \otimes \mathcal{O}(2)$, a zatem mamy ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \Omega \otimes \mathcal{O}(2) \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0\,,$$

w którym $\mathcal{N} \otimes \mathcal{O}(-1)$ jest wiązką korelacji zer. Ta niepozornie wyglądająca wiązka wektorowa odgrywa ważną rolę przy klasyfikacji wiązek, ale wspominam o niej z innej okazji.

8. Gawęda o pewnych sprawach. Jerzy Browkin (1934 - 2015) powiedział kiedyś tak: „W dziewiętnastym wieku ludzie znali pewne liczby – obecnie znają je jako rzędy pewnych grup". Parafrazując to, widzimy, że dawne, pochodzące z połowy dziewiętnastego wieku konstrukcje geometryczne, ukazują się nam teraz w innym świetle – są częścią teorii wiązek wektorowych, bardzo modnej w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych poprzedniego, czyli dwudziestego wieku. A drugie powiedzenie pochodzi od Andrzeja Grzegorczyka (1922 - 2014): „Matematyk ma dwie przyjemności: konstruowanie i dowodzenie". Ja sądzę jednak, że tych przyjemności jest więcej – wśród nich i radość odkrywania na nowo starych rzeczy: mówiąc nieco pompatycznie, przywracania im dawnego blasku. *Ostrzegłem na początku, że artykuł ma formę eseju.* Otóż we wspólnej pracy z Giorgio Ottavianim w 1994 roku badaliśmy przestrzenie *moduli* wiązek wektorowych rangi 2 na kwadryce trójwymiarowej $\mathbb{Q}_3$. Udało się nam między innymi dokładnie opisać strukturę przestrzeni $\mathcal{M}(0,2)$, złożoną z wiązek stabilnych o klasach Cherna $c_1 = 0$, $c_2 = 2$. Nie wchodząc w szczegóły, wiązki owe były klasyfikowane przez postaci Jordana macierzy AJ, gdzie A była macierzą symetryczną, zaś J – antysymetryczną. Inaczej rzecz ujmując, typ wiązki zależał od relacji między dwiema formami: symetryczną i antymetryczną, albo jeszcze inaczej: od konfiguracji linii izotropowych względem formy J na kwadryce określonej przez A. Do opisu osobliwości użyliśmy programu Macalauy, powstałego ledwie kilka lat wcześniej. „Zaraz, zaraz" powiedział Gioorgio, „ja już gdzieś to widziałem". Po dłuższej chwili przyniósł z biblioteki zakurzony tom z 1936 roku, w którym John Williamson poklasyfikował właśnie to, o co nam chodziło.

Geometria algebraiczna jest we Włoszech jak topologia w Polsce – dawna świetność. Dlatego mój współautor mógł się domyślić, że „to już było". Ale obu nam było przyjemnie, że odkryliśmy coś, co łączy stare z nowym.

9. Jeszcze jeden stary rezultat w nowym świetle. Niekiedy zbiór linii prostych na rozmaitości algebraicznej X nazywa się rozmaitością Fano tej rozmaitości, $F(X)$, od nazwiska matematyka włoskiego Gino Fano (1871 - 1952). Jest zrozumiałe, że $F(Q_2) = P_1 \sqcup P_1$ (dwie kopie prostej rzutowej). Interesujące jest porównanie dwóch dowodów (starego i nowego) naatępującego faktu:

Każde zanurzenie kwadryki wymiaru 3 w kwadrykę wymiaru 4: $\mathbb{Q}_3 \hookrightarrow \mathbb{Q}_4$ wyznacza utożsamienie $F(\mathbb{Q}_3)$ z przestrzenią rzutową trójwymiarową $\mathbf{P}^3$.

Dowód I („dzięwiętnastowieczny"). Niech V oznacza przestrzeń afiniczną (liniową), której projektywizacją jest $\mathbf{P}^3$. Przy zanurzeniu $\mathbb{Q}_3 \hookrightarrow \mathbb{Q}_4$ prosta L jest zawarta w dokładnie dwóch płaszczyznach $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, pochodzących z dwóch systemów tworzących na $\mathbb{Q}_4$; niech $\mathbf{P}_1 = \{\ell \subset \mathbf{P}^3 : x \in \ell\}$, $\mathbf{P}_2 = \{\ell \subset \mathbf{P}^3 : l \subset P\}$. Wówczas odpowiedniość $L \longmapsto x$ określa izomorfizm $F(\mathbb{Q}_3)$ na $\mathbf{P}^3$, zaś odpowiedniość $L \longmapsto P$ określa izomorfizm $F(\mathbb{Q}_3)$ na $\mathbf{P}^3*$.

Dowód „współczesny", (szkic, szczegóły np. w [O] i [SzW]; tu chcę tylko pokazać zmianę stylu). Rozpatrzmy wiązkę spinorową S na $\mathbb{Q}_3$. Jest to obcięcie wiązki uniwersalnej z Grassmannianu $G(1,4)$ i jest wiązką stabilną rangi 2, o klasach Cherna $c_1 = 1$, $c_2 = 1$. Na każdej prostej $L \subset \mathbb{Q}_3$ mamy $\mathrm{S}|L = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$.

Projektywizacja $\mathbf{P}(\mathrm{S})$ jest rozmaitością wymiaru 4. Można wykazać, że system liniowy ξ_S definiuje odwzorowanie (kontrakcję) $\mathbf{P}(\mathrm{S})$ w $\mathbf{P}^3$. Ponieważ $\mathrm{S}|L = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$, więc w projektywizacji $\mathbf{P}(S) \to \mathbb{Q}_3$ istnieje krzywa ℓ, która jest ściągnięta do punktu przez odwzorowanie wyznaczone przez system liniowy.

10. Sprawa polska. Niedługo nadejdzie setna rocznica odzyskania niepodległości, a wraz z tą rocznicą 100 lat od słynnego artykułu Zygmunta Janiszewskiego z ideą, którą tak tu streszczę „stwórzmy własną, polską szkołę matematyczną, przyjdźmy do Europy z naszym własnym dorobkiem, na pewno się uda!” W piśmiennictwie polskim na ogół jest przemilczane (choć założyciele Polskiej Szkoły Matematycznej wcale się z tym nie kryli), że był to skopiowany pomysł Włochów, którzy po zjednoczeniu w 1870 roku też mieli biedny kraj, zniszczonym wojnami i wewnętrznymi swarami. Oni postawili na geometrię algebraiczną – Polacy na logikę, topologię i teorię mnogości; analiza funkcjonalna i podstawy geometrii wyskoczyły potem. Jak wiemy, udało się i im, i nam, chociaż Włosi mieli więcej szczęścia – ich geometria algebraiczna odżyła na nowo w latach pięćdziesiątych XX wieku. Topologia ogólna i teoria mnogości weszły do skarbnicy ogólnej wiedzy matematycznej, podstawy geometrii zostały wyeksploatowane jak kopalnie surowców w Tatrach.

Literatura

[D] Jean Dieudonné, *The tragedy of Grassmann*, Linear and Multilinear Algebra 8 (1) (1979/80), 1-14.

[GH] Phillip Griffiths, Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, 1978.

[KJ] Koncert Jankiela, [w:] Adam Mickiewicz, *Pan Tadeusz, czyli ostatni zajazd na Litwie*. Paryż (1834), wyd. Aleksander Jełowiecki i wydania późniejsze.

[Ku] Thomas S. Kuhn *Struktura rewolucji naukowych*, (1962), wydanie polskie Aletheia, 2009, tłum. Helena Ostromęcka)

[O] Giorgio Ottaviani, *Spinor bundles on Quadrics*, Trans. Amer. Math. Soc. 307, 1, p. 301-316 (1988).

[OSz] Giorgio Ottaviani, Michał Szurek, *On Moduli of Stable 2-Bundles with Small Chern Classes on* $\mathbb{Q}_3$. Annali di Matematica pura ed applicata (IV), Vol. CLXVII (1994), pp. 191-241.

[Pe] Giuseppe Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.* (1888)

[S] Corrado Segre, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, Memorie Acc. Sci. Torino (II) XXXVI (1883), 3-86.

[Sz] Michał Szurek, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, t. 1-8, Gdańsk, 2006.

[SSzW] Ignacio Sols, Michał Szurek, Jarosław A. Wiśniewski, *Rank-2 Fano bundles over a smooth quadric* $\mathbb{Q}_3$. Pacific J. Math., vol. 148, Number 1 (1991), 153-159.

[Wil] J.Williamson, *On an algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems*, Amer. J. Math., 58 (1936), pp. 141-163

GEOMETRY OF QUADRICS IN PROJECTIVE SPACES,
FROM 19TH TO THE 21TH CENTURY

Summary. The article, written in a form of an essay rahter than scientific paper, deals with the geometry of a smooth quadric in the projective n-space over complex numbers. We compare old, 19th century methods (mostly by Corrado Segre) with contemporary approach to the same problems (Mori theory, geometry of vector bundles).

Łódź, 11 – 15 stycznia 2016 r.