MATERIAŁY XVIII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ

1997 **Łódź** **str. 87**

TWIERDZENIE REIDERA

DLA ZANURZENIA WYŻSZEGO RZĘDU

H. Tutaj-Gasińska (Kraków)

Wstęp

W ostatnich latach pojawiło się kilka podejść do zanurzeń wyższego rzędu. Nowe definicje zostały wprowadzone głównie w pracach Beltramettiego, Francii i Sommese [1], [2]. Najważniejsze z nich to $k-$bardzo szerokość oraz generowanie dżetów do rzędu k. Szereg informacji na temat zanurzeń wyższego rzędu można znaleźć w pracy [10] w tym samym tomie. Tutaj przypomnimy jedynie następującą definicję.

Definicja 1 *Niech V będzie gładką rozmaitością rzutową i niech L będzie wiązką liniową na V. Mówimy, że wiązka L generuje dżety do rzędu k, jeśli dla dowolnych punktów $x_1, \dots, x_r$ oraz dodatnich liczb całkowitych $k_1, \dots, k_r$ takich, że $k_1 + \dots + k_r = k + 1$ odwzorowanie*

$$H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes \mathcal{O}_V / m_{x_1}^{k_1} \otimes \cdots \otimes m_{x_r}^{k_r})$$

jest surjekcją.

1991 *Mathematics Subject Classification:* 14C20.
Praca wykonana w ramach grantu KBN nr 2 P03A 061 08.
Autor jest stypendystća Fundacji Nauki Polskiej.
1991 *Mathematics Subject Classification:* 14C20, 14J99

Twierdzenie Reidera [8] zostało uogólnione przez Beltramettiego i Sommese [2] na przypadek wiązek $k-$bardzo szerokich. Celem niniejszej pracy jest dowód analogicznego twierdzenia dla wiązek generujących dżety do rzędu k.

Twierdzenie. *Niech X będzie gładką powierzchnią i niech L będzie nef i dużą wiązką liniową na X taką, że:*

(*) $L^2 \geq (k+2)^2 + 1$

(**) $LC \geq k^2 + 3k + 3$ *dla każdej krzywej* $C \subset X$.

Wówczas wiązka stowarzyszona $K_X + L$ generuje dżety do rzędu k.

Dla generowania dżetów w jednym punkcie twierdzenie to zostało udowodnione przez Lazarsfelda [7, Twierdzenie 7.4]. Szkic dowodu tezy naszego twierdzenia przy mocniejszych założeniach przedstawił Demailly [3].

Zapis i konwencje

W pracy wszystkie rozważania są prowadzone nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. O rozmaitościach zakładamy, że są gładkie i rzutowe. Przez K_X oznaczamy dywizor kanoniczny rozmaitości X. Dla snopa koherentnego $\mathcal{F}$ na rozmaitości X przez $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\mathcal{F})$ oznaczamy odpowiednie grupy kohomologii a przez $h^i(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(\mathcal{F})$ ich wymiar. Dla punktu $x \in X$ przez $\mathfrak{m}_x$ oznaczamy jego snop ideałów. Dla wiązek liniowych L i dywizorów D na X wymiennie używamy zapisu $L + D$, $\mathcal{O}_X(D) \otimes L$ lub $\mathcal{O}_X(D + L)$ w zgodzie z obecnymi tendencjami w literaturze.

Generowanie dżetów na powierzchniach

Niech V będzie gładką rozmaitością rzutową wymiaru n i niech L będzie wiązką liniową na V. Przypomnimy najpierw wykorzystywane w pracy pojęcia.

Definicja 2 *a) Wiązka L na V jest numerycznie efektywna (nef) jeśli $LC \geq 0$ dla każdej krzywej $C \subset V$.*

b) Wiązka L jest duża, jeśli ma maksymalny wymiar Kodairy, czyli $h^0(kL) \cong k^n$. W szczególności numerycznie efektywna wiązka L jest duża gdy $L^n > 0$.

Definicja 3 *a) $\mathbf{Q}$-dywizorem na V nazywamy $\mathbf{Q}$-liniową kombinację:*

$$Z := \sum_i a_i D_i \ ; \quad a_i \in \mathbf{Q}$$

gdzie D_i są nierozkładalnymi, zredukowanymi podrozmaitościami kowymiaru 1.

b) Zaokrągleniem do góry $\mathbf{Q}$*-dywizora* $Z := \sum_i a_i D_i, a_i \in \mathbf{Q}$*; nazywamy dywizor*

$$\lceil Z \rceil := \sum_i \lceil a_i \rceil D_i$$

gdzie $\lceil a \rceil := min\{m \in \mathbf{Z} : m \geq a\}$.

c) Zaokrągleniem do dołu $\mathbf{Q}$*-dywizora* $Z := \sum_i a_i D_i, a_i \in \mathbf{Q}$*; nazywamy dywizor*

$$[Z] := \sum_i [a_i] D_i$$

gdzie $[a] := max\{m \in \mathbf{Z} : m \leq a\}$.

Definicja 4 *Niech* Z *będzie* $\mathbf{Q}$*-dywizorem. Analogicznie jak w definicji 2, mówimy, że dywizor* Z *jest numerycznie efektywny gdy* $ZC \geq 0$ *dla każdej krzywej* $C \subset V$*; oraz gdy* Z *jest nef to mówimy, że* Z *jest duży gdy* $Z^n > 0$.

Następujące twierdzenie [6], [11] stanowi uogólnienie klasycznego twierdzenia Kodairy o znikaniu.

Twierdzenie 5 (Kawamata-Viewheg) *Niech* Z *będzie numerycznie efektywnym i dużym* $\mathbf{Q}$*-dywizorem na gładkiej rozmaitości rzutowej* V*, takim, że nośnik* $\mathbf{Q}$*-dywizora* $\{Z\} := Z - [Z]$ *jest dywizorem z normalnymi przecięciami. Wówczas*

$$H^i(V, \mathcal{O}_V(K_V + \lceil Z \rceil)) = 0 \quad dla \quad i > 0.$$

Lemat 6 (Sakai, [9]) *W przypadku gdy* V *jest gładką powierzchnią twierdzenie Kawamaty-Viehwega jest spełnione bez założenia o normalnych przecięciach.*

Twierdzenie 5 i powyższy lemat są podstawowymi narzędziami w dowodzie głównego rezultatu tej pracy:

Twierdzenie. *Niech* X *będzie gładką powierzchnią, niech* L *będzie nef i dużą wiązką liniową na* X*, taką, że:*

(*) $L^2 \geq (k+2)^2 + 1$

(**) $LC \geq k^2 + 3k + 3$ *dla każdej krzywej* $C \subset X$.

Wówczas $K_X + L$ *generuje dżety do rzędu* k.

Dowód. Niech $x_1, ..., x_r \in X$ oraz niech $k_1, ..., k_r$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $k_1 + \cdots + k_r = k + 1$. Mamy wykazać, że odwzorowanie

$$H^0(K_X + L) \longrightarrow H^0((K_X + L) \otimes \mathcal{O}_X / m_{x_1}^{k_1} \otimes \cdots \otimes m_{x_r}^{k_r})$$

jest surjektywne.
W tym celu wystarczy pokazać, że

$$H^1((K_X + L) \otimes m_{x_1}^{k_1} \otimes \cdots \otimes m_{x_r}^{k_r}) = 0.$$

Niech $f : \tilde{X} \longrightarrow X$ będzie rozdmuchaniem X w punktach $x_1, ..., x_r$. Wówczas $K_{\tilde{X}} = f^*K_X + E_1 + \cdots + E_r$, gdzie E_i oznacza dywizor wyjątkowy nad punktem x_i. Korzystając z ciągu spektralnego Leray'a [4, rozdział 3.5] oraz formuły rzutowej [5, ćwiczenie 2.5.1] mamy:

$$H^1((K_X + L) \otimes m_{x_1}^{k_1} \otimes \cdots \otimes m_{x_r}^{k_r}) \cong H^1(f^*K_X + f^*L - k_1E_1 - \cdots - k_rE_r).$$

Zatem wystarczy udowodnić, że

$$H^1(K_{\tilde{X}} + f^*L - (k_1+1)E_1 - \cdots - (k_r+1)E_r) = 0.$$

Z twierdzenia 5 i lematu 6 wynika, że wystarczy skonstruować **Q**-dywizor Z (na $\tilde{X}$), numerycznie efektywny i duży, taki, że:

$$\lceil Z \rceil = f^*L - (k_1+1)E_1 - \cdots - (k_r+1)E_r.$$

Reszta dowodu poświęcona jest konstrukcji Z. Zanim do niej przystąpimy potrzebna będzie następująca:

Definicja 7 *(1) Niech D_1 będzie dywizorem. Mówimy, że* **Q***-dywizor $D := \frac{1}{m}D_1$ ma w punkcie x krotność większą (mniejszą, równą) od q jeśli dywizor D_1 ma w x krotność większą (mniejszą, równą) od mq.*

(2) Mówimy, że **Q***-dywizor $D \in |nL|$ ma osobliwość prawie izolowaną o indeksie większym od s w punkcie x jeśli:*

a) $\mathrm{mult}_x D > ns$

b) Istnieje U, otoczenie x, takie, że $\mathrm{mult}_y D < n, \forall y \in U \setminus \{x\}$.

Lemat 8 *Niech X będzie gładką powierzchnią rzutową; $x_1, ..., x_r \in X$ ustalonymi punktami na X i k dodatnią liczbą całkowitą. Niech L będzie nef wiązką liniową na X, spełniającą założenia (*) i (**).*
Wówczas, dla odpowiednio dużego $n \in$ **N** *istnieje* **Q***-dywizor $D \in |nL|$, mający w punktach $x_i, i = 1, ..., r$ osobliwości prawie izolowane o indeksach większych od $k_i + 1, i = 1, ..., r$.*

Dowód lematu.
Niech, $f : \tilde{X} \longrightarrow X$ będzie rozdmuchaniem X w x_i, $i = 1, ..., r$. Weźmy:

$$B := f^*(mL) - \sum_{i=1}^{r}(m(k_i+1)+1)E_i,$$

gdzie m jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Wówczas:

$$H^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(nB)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(nmL) \otimes m_{x_1}^{nm(k_1+1)+n} \otimes \cdots \otimes m_{x_r}^{nm(k_r+1)+n}),$$

skąd, na podstawie twierdzenia Riemanna-Rocha, dla dużych n zachodzi:

$$h^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(nB)) \geq \frac{n^2}{2}m^2L^2 - \sum_{i=1}^{r} \binom{mn(k_i+1)+n}{2} =$$

$$= \frac{n^2}{2}(m^2L^2 - \sum_{i=1}^{r}(m(k_i+1)+1)^2 - \sum_{i=1}^{r}\frac{m(k_i+1)+1}{n}).$$

Wykorzystując nierówność $(k+2)^2 \geq \sum_{i=1}^{r}(k_i+1)^2$ i biorąc m i n odpowiednio duże otrzymujemy: $h^0(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(nB)) > 0$.
Rozważmy teraz rozkład systemu liniowego $|nB|$:

$$|nB| = |M_n| + F_n$$

na dywizor bazowy F_n systemu $|nB|$ oraz część ruchomą $|M_n|$.
Z [7, Propozycja 7.3] dostajemy nierówność:

$$M_n^2 \geq n^2(m^2L^2 - \sum_{i=1}^{r}(m(k_i+1)+1)^2)$$

Z twierdzenia Hodge'a o Indeksie:

$$M_n f^*(mL) \geq \sqrt{(m^2L^2)(M_n)^2} \geq n\sqrt{(m^2L^2)(m^2L^2 - \sum_{i=1}^{r}(m(k_i+1)+1)^2)}.$$

Ponieważ $F_n = f^*(nmL) - n\sum_{i=1}^{r}(m(k_i+1)+1)E_i - M_n$, to:

$$F_n f^*(mL) \leq nm^2L^2 - n\sqrt{(m^2L^2)(m^2L^2 - \sum_{i=1}^{r}(m(k_i+1)+1)^2)}. \tag{1}$$

Niech teraz

$$f(x) := m^2x - \sqrt{m^2x(m^2x - \sum_{i=1}^{r}(m(k_i+1)+1)^2)}.$$

Ponieważ funkcja $f(x)$ jest malejąca, nietrudno sprawdzić, że dla $x \geq (k+2)^2 + 1$ zachodzi

$$f(x) < m^2(k^2+3k+3).$$

Ze wzoru (1) wynika zatem, że:

$$F_n f^*(mL) < nm^2(k^2+3k+3) \tag{2}$$

Rozważamy teraz $\bar{F}_n := f_*F_n \subset X$, dywizor bazowy dla systemu liniowego $|\mathcal{O}_X(nmL) \otimes m_{x_1}^{nm(k_1+1)+n} \otimes \cdots \otimes m_{x_r}^{nm(k_r+1)+n}|$. Z nierówności (2) mamy zatem:

$$\bar{F}_n(mL) < nm^2(k^2+3k+3),$$

skąd wynika, że jeśli C jest komponentą $\bar{F}_n$ to

$$\mathrm{ord}_C \bar{F}_n < mn,$$

a zatem istnieje dywizor $D_1 \in |\mathcal{O}_X(nmL) \otimes m_{x_1}^{nm(k_1+1)+n} \otimes \cdots \otimes m_{x_r}^{nm(k_r+1)+n}|$, mający w sąsiedztwie punktów $x_i,\ i = 1, ..., r$ krotność mniejszą od nm oraz w punktach $x_1, ..., x_r$ krotność większą lub równą $n(m(k_i+1)+1)$.
$\mathbf{Q}$-dywizor $D := \frac{1}{m} D_1$, spełnia warunki lematu. □

Możemy teraz powrócić do dowodu głównego twierdzenia.
Niech

$$Z := f^*L - \lambda f^*D,$$

gdzie L jest wiązką spełniającą założenia twierdzenia a $D \in |nL|$ $\mathbf{Q}$-dywizorem spełniającym tezę lematu.
Aby zakończyć dowód twierdzenia należy sprawdzić, że przy odpowiednim doborze $\lambda > 0$ Z jest nef i duży oraz

(3) $$\lceil Z \rceil = f^*L - (k_1+1)E_1 - \cdots - (k_r+1)E_r.$$

Aby Z był nef i duży wystarczy by

(4) $$1 - n\lambda > 0$$

(bo L jest nef i dużą wiązką liniową oraz $Z \in (1 - n\lambda) f^*L$.)
Aby sprawdzić, kiedy zachodzi (3), zapiszmy: $D = \sum_j d_j D_j$, zatem $Z = f^*L - \lambda \sum_j d_j f^*D_j$; niech $\tilde{D}_j = f^*D_j - \sum_{i=1}^r (\mathrm{mult}_{x_i} D_j) E_i$, a więc ostatecznie:

$$Z = f^*L - \lambda \sum_j d_j \tilde{D}_j - \lambda \sum_{i=1}^r (\mathrm{mult}_{x_i} D) E_i.$$

Łatwo zauważyć, że aby spełniona była równość (3), wystarczy, by

(5) $$[\lambda d_i] = 0$$

oraz

(6) $$[\lambda\, \mathrm{mult}_{x_i} D] \geq k_i + 1,\ \ i = 1, ..., r.$$

Zdefiniujmy

$$\lambda := \max\{\frac{k_i+1}{\mathrm{mult}_{x_i} D},\ i = 1, ..., r\}$$

Ponieważ D spełnia Lemat, to $\mathrm{mult}_{x_i} D > n(k_i+1)$ oraz $d_j < n\ \forall j$, skąd wynika, że warunki (4), (5) i (6) są spełnione, co kończy dowód twierdzenia. □

Bibliografia

[1] Beltrametti, M.C., Francia, P., Sommese, A.J.: On Reider's method and higher order embeddings. Duke Math. J. 425-439 (1989)
[2] Beltrametti, M.C., Sommese, A.J.: Zero cycles and k-th order embeddings. Projective surfaces and their classification, Symp. Math., INDAM, vol. 32, Academic Press 1988, pp. 33-48
[3] Demailly, J.-P.: L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory. To appear
[4] Griffiths, P. A., Harris, J.: Principles of Algebraic Geometry. Wiles, New York 1978
[5] Hartshorne, R.: Algebraic geometry. Springer 1977
[6] Kawamata, Y.: A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem. Math. Ann. 261, 43-46 (1982)
[7] Lazarsfeld, R.: Lectures on linear series. Park City / IAS Mathematics series vol. 3, 1-56 (1993)
[8] Reider, I.: Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces. Ann. Math. 127, 309-316 (1988)
[9] Sakai, F.: Weil divisors on normal surfaces. Duke Math. J. 51, 877-887 (1984)
[10] Szemberg, T.: Zanurzenia wyższego rzędu. Ten sam tom.
[11] Viehweg, E.: Vanishing theorems. J. reine angew. Math. 335, 1-8 (1982)

Halszka Tutaj-Gasińska Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński, Reymonta 4, PL-30-059 Kraków, Poland

Reider theorem for higher order embeddings

Summary. In the note we give numeric conditions for an adjoint line bundle on any algebraic surface to be k-jet ample.

Bronisławów, 13 – 17 stycznia, 1997 r.