MATERIAŁY NA XXIX KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2008 **Łódź** **str. 59**

SKOKI LICZBY MILNORA W RODZINACH OSOBLIWOŚCI I

Justyna Walewska (Łódź)

Streszczenie

W artykule, opartym na pracy A. Bodina [1], omówiony jest problem wyznaczenia minimalnej, niezerowej różnicy między liczbami Milnora osobliwości krzywej i jej niezdegenerowanej deformacji.

1. WPROWADZENIE

Niech $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ będzie *izolowaną osobliwością krzywej płaskiej* (krótko *osobliwością*), tzn. f_0 jest kiełkiem funkcji holomorficznej $f_0(x, y)$ o izolowanym punkcie krytycznym w punkcie $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. W dalszym ciągu będziemy utożsamiać kiełki funkcji z ich reprezentantami lub odpowiadającymi im szeregami potęgowymi zbieżnymi.

Deformacją osobliwości f_0 nazywamy kiełek funkcji holomorficznej trzech zmiennych $f(s, x, y)$ taki, że

1. $f(0, x, y) = f_0(x, y)$

2. dla dowolnego $s \in U$ (U- dostatecznie małe otoczenie $0 \in \mathbb{C}$) kiełek $f_s(x,y) := f(s,x,y)$ spełnia warunki

   a) $f_s(0,0) = 0$,

   b) $(\frac{\partial f_s}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f_s}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$ dla (x,y) w pewnym sąsiedztwie punktu $(0,0)$.

Zbiór wszystkich deformacji f_0 oznaczamy przez $\mathcal{D}(f_0)$. Deformację traktujemy też jako rodzinę kiełków

$$f_s(x,y) := f(s,x,y), \qquad s \in U,$$

gdzie U jest dostatecznie małym otoczeniem $0 \in \mathbb{C}$ i oznaczamy $(f_s)_{s \in U}$ lub krótko (f_s). Dla każdego $s \in U$ określona jest liczba Milnora $\mu(f_s)$, $s \in U$. Na mocy znanej własności półciągłości z góry liczb Milnora w rodzinach osobliwości (Propozycja II.5.3 w [7]) $\mu(f_s)$ jest liczbą stałą dla $s \in U \setminus \{0\}$, (o ile U jest dostatecznie małym otoczeniem zera) i $\mu(f_0) \geqslant \mu(f_s)$. *Skokiem* $\lambda((f_s))$ *deformacji* (f_s) nazywamy nieujemną liczbę całkowitą

$$\lambda((f_s)) := \mu(f_0) - \mu(f_s), \qquad s \in U.$$

Skokiem $\lambda(f_0)$ *kiełka* f_0 nazywamy minimalny z niezerowych skoków rodzin (f_s) po wszystkich możliwych deformacjach kiełka f_0, czyli

$$\lambda(f_0) := \min_{(f_s) \in \mathcal{D}_0(f_0)} \lambda((f_s)),$$

gdzie przez $\mathcal{D}_0(f_0)$ oznaczamy wszystkie deformacje (f_s) kiełka f_0, dla których $\lambda((f_s)) \neq 0$.

W pracy [2], Gusein-Zade udowodnił, że istnieją kiełki f_0 takie, że $\lambda(f_0) > 1$.

Przykład 1 (Gusein-Zade [2]) *Niech* $f_0(x,y) = x^4 - y^4$. *Wówczas* $\lambda(f_0) > 1$. *Ponieważ dla deformacji* $f_s(x,y) = x^4 - (y^2 + sx)^2$ *kiełka* f_0 *mamy* $\lambda((f_s)) = 2$, *więc* $\lambda(f_0) \leqslant 2$. *Łącznie* $\lambda(f_0) = 2$.

W pracy (część I i II) omówimy znacznie łatwiejszy problem skoku liczb Milnora w klasie deformacji niezdegenerowanych, tzn. takich, że każdy element f_s, $s \neq 0$, ma osobliwość niezdegenerowaną (w sensie Kouchnirenki) w zerze. W znacznej części rozważania opieramy na preprincie A. Bodina [1], podając pełne dowody twierdzeń. W pierwszej części ograniczymy się do przypadków, w których potrafimy podać dokładny wzór na ten skok. W części II podamy oszacowanie niezdegenerowanego skoku liczb Milnora oraz rozważymy przypadek osobliwości niedogodnych.

2. OSOBLIWOŚCI NIEZDEGENEROWANE

W dalszym ciągu $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Niech $f_0(x, y) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_{ij}x^iy^j$, $f_0(0, 0) = 0$, będzie osobliwością. Niech $\mathrm{supp} f_0 := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : a_{ij} \neq 0\}$. *Diagramem Newtona* $f_0 \neq 0$ nazywać będziemy otoczkę wypukłą zbioru $\bigcup_{(i,j)\in \mathrm{supp} f_0}((i, j) + \mathbb{R}^2_+)$, ($\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0 \wedge y \geqslant 0\}$) i oznaczamy $\Gamma_+(f_0)$.

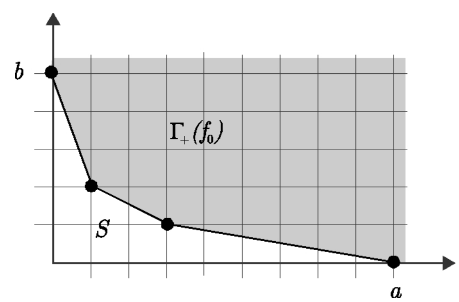
Brzeg diagramu $\Gamma_+(f_0)$ jest sumą dwóch półprostych i skończonej liczby odcinków zwartych i parami nierównoległych, niezawartych w tych półprostych. Odcinki te tworzą tzw. *łamaną Newtona* osobliwości f_0, którą oznaczamy $\Gamma(f_0)$. Odcinki łamanej mogą być w naturalny sposób uporządkowane; przyjmujemy, że pierwszym jest najwyżej położony (leży najbliżej osi pionowej). Często utożsamiamy parę $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ z jednomianem x^iy^j. Osobliwość f_0 nazywamy *dogodną*, jeśli $\Gamma(f_0)$ ma punkty wspólne z osiami OX i OY.

Dla odcinka $\gamma \in \Gamma(f_0)$, definiujemy $(f_0)_\gamma := \sum_{(i,j)\in\gamma} a_{ij}x^iy^j$. Osobliwość f_0 nazywamy *niezdegenerowaną na odcinku* $\gamma \in \Gamma(f_0)$ (w sensie Kouchnirenki), gdy układ

$$\frac{\partial (f_0)_\gamma}{\partial x}(x, y) = 0,\ \frac{\partial (f_0)_\gamma}{\partial y}(x, y) = 0$$

nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Osobliwość f_0 nazywamy *niezdegenerowaną*, gdy f_0 jest niezdegenerowana na każdym odcinku $\gamma \in \Gamma(f_0)$.

Niech f_0 będzie osobliwością dogodną. Oznaczmy przez S pole zbioru ograniczonego osiami OX, OY i łamaną $\Gamma(f_0)$. Przez a i b oznaczamy odległość punktu $(0, 0)$ od części wspólnej diagramu Newtona $\Gamma_+(f_0)$ z osiami OX i OY.



Dla dogodnej osobliwości f_0 określamy

$$\nu(f_0) := 2S - a - b + 1.$$

Łatwo sprawdzamy, że $\nu(f_0) \geqslant 0$.

Przypomnijmy trzy znane twierdzenia o niezdegenerowanych osobliwościach potrzebne w dalszym ciągu.

Twierdzenie 1 (Kouchnirenko [3]) *Załóżmy, że osobliwość f_0 jest dogodna. Wtedy*

- $\mu(f_0) \geqslant \nu(f_0)$,
- *jeżeli f_0 jest niezdegenerowana, to $\mu(f_0) = \nu(f_0)$.*

Twierdzenie 2 (Płoski [5]) *Załóżmy, że osobliwość* f_0 *jest dogodna. Jeśli* $\mu(f_0) = \nu(f_0)$, *to* f_0 *jest osobliwością niezdegenerowaną.*

Twierdzenie 3 (Płoski [6]) *Jeśli* f_0 *jest osobliwością niezdegenerowaną, dogodną i nierozkładalną, to łamana Newtona składa się z jednego odcinka o wierzchołkach* $(a, 0)$, $(0, b)$ *i* $\mathrm{NWD}(a, b) = 1$.

3. NIEZDEGENEROWANY SKOK LICZBY MILNORA

Niech f_0 będzie osobliwością. *Deformacją niezdegenerowaną* f_0 nazywamy deformację $(f_s)_{s\in U}$ kiełka f_0 taką, że f_s jest niezdegenerowana dla $s \neq 0$. Zbiór wszystkich niezdegenerowanych deformacji osobliwości f_0 oznaczamy przez $\mathcal{D}^{nd}(f_0)$. *Niezdegenerowany skok* $\lambda'(f_0)$ *osobliwości* f_0 jest minimalnym z niezerowych skoków po wszystkich niezdegenerowanych deformacjach f_0, tzn.

$$\lambda'(f_0) := \min_{(f_s)\in\mathcal{D}_0^{nd}(f_0)} \lambda((f_s)),$$

gdzie przez $\mathcal{D}_0^{nd}(f_0)$ oznaczamy wszystkie niezdegenerowane deformacje (f_s) kiełka f_0 dla którego $\lambda((f_s)) \neq 0$.

Zachodzi oczywiste

Stwierdzenie 1 *Dla dowolnej osobliwości* f_0 *zachodzi nierówność*

$$\lambda(f_0) \leqslant \lambda'(f_0).$$

W powyższej nierówności może zachodzić nierówność ostra.

Przykład 2 *Niech* $f_0(x, y) = x^4 - y^4$. *Na mocy przykładu* 1, $\lambda(f_0) = 2$. *Z dalszej części artykułu będzie wynikało, że* $\lambda'(f_0) = 3$. *Realizuje to niezdegenerowana deformacja* $f_s(x, y) = x^4 - y^4 + sx^3$, $s \in \mathbb{C}$. *Zatem w tym przypadku* $\lambda(f_0) < \lambda'(f_0)$.

Niech f_0 będzie niezdegenerowaną i dogodną osobliwością oraz (f_s) jej deformacją. Zauważmy, że dla dostatecznie małych $s \neq 0$, diagram Newtona f_s nie zależy od s. Oznaczmy przez S (odpowiednio S_1) pole zbioru ograniczonego osiami OX i OY i łamaną Newtona $\Gamma(f_0)$ (odpowiednio $\Gamma(f_s)$ dla $s \neq 0$). Przez a, b (odpowiednio a_1, b_1), oznaczamy odległość punktu $(0, 0)$ od części wspólnej diagramu Newtona $\Gamma(f_0)$ (odpowiednio $\Gamma(f_s)$) z osiami OX i OY. Z formuły Kouchnirenki wynika następująca geometryczna charakteryzacja skoków $\lambda'((f_s))$.

Stwierdzenie 2 $\lambda'((f_s)) = 2(S - S_1) - (a - a_1) - (b - b_1)$.

4. FORMUŁA DLA NIEZDEGENEROWANEGO SKOKU LICZB MILNORA OSOBLIWOŚCI NIEZDEGENEROWANEJ

Przypomnijmy najpierw definicję i niektóre znane fakty dotyczące wielomianów quasi-jednorodnych. Niech $f \in \mathbb{C}[X,Y]$ będzie wielomianem różnym od stałej. f nazywamy *wielomianem quasi-jednorodnym stopnia* d, gdy istnieją $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ takie, że $\mathrm{NWD}(m,n) = 1$ oraz spełniony jest warunek

$$f(\lambda^m x, \lambda^n y) = \lambda^d f(x,y).$$

Liczby m i n nazywamy *wagami zmiennych* x i y. f jest *wielomianem jednorodnym*, gdy $m = n = 1$.

Twierdzenie 4 *Niech f będzie wielomianem quasi-jednorodnym o wagach m i n. Wówczas istnieje wielomian jednorodny (forma) ν i liczby r, $s \in \mathbb{N}$ takie, że*

$$f(x,y) = x^r y^s \nu(x^n, y^m), \quad \nu(0,y) \neq 0, \quad \nu(x,0) \neq 0.$$

Przed podaniem wzoru na skok niezdegenerowany przypomnijmy znane własności o niezdegenerowanych osobliwościach. Niech f_0 będzie osobliwością i $\Gamma(f_0)$ jej łamaną Newtona.

Własność 1 *Dla dowolnego $\gamma \in \Gamma(f_0)$ wielomian $(f_0)_\gamma$ jest quasi-jednorodny.*

Własność 2 *Dla dowolnego $\gamma \in \Gamma(f_0)$ wierzchołki odcinka γ należą do* $\mathrm{supp} f_0$*. Jeżeli γ nie zawiera innych punktów* $\mathrm{supp} f_0$ *oprócz krańców, to f_0 jest niezdegenerowany na γ.*

Własność 3 *f_0 jest niezdegenerowany na odcinku $\gamma \in \Gamma(f_0)$ $\Leftrightarrow$ forma ν odpowiadająca $(f_0)_\gamma$ nie ma czynników wielokrotnych $\Leftrightarrow$ wyróżnik $\Delta(\nu)$ formy ν jest różny od zera.*

Niech osobliwość f_0 będzie niezdegenerowana i dogodna. Oznaczmy przez J zbiór wszystkich jednomianów $x^p y^q$, gdzie $p + q \geqslant 1$ leżących w zwartym obszarze ograniczonym osiami i diagramem Newtona $\Gamma_+(f_0)$. Oczywiście zbiór J jest skończony.

Lemat 1 *Dla dowolnego $x^p y^q \in J$ deformacja $f_s = f_0 + s x^p y^q$, $s \in U$, jest niezdegenerowana.*

Dowód. Ponieważ $x^p y^q \in J$, więc dla $s \neq 0$, $\mathrm{supp}(f_s) = \{(p,q)\} \cup \mathrm{supp} f_0$. Zatem diagram Newtona (f_s) jest stały dla $s \neq 0$. Niech γ będzie odcinkiem łamanej Newtona (f_s), dla $s \neq 0$. Rozważmy przypadki:

1. $(p,q) \notin \gamma$. Wtedy krańce γ leżą w $\mathrm{supp} f_0$, γ jest odcinkiem łamanej Newtona osobliwości f_0 oraz $(f_s)_\gamma = (f_0)_\gamma$. Ponieważ f_0 jest niezdegenerowana, więc (f_s) jest niezdegenerowana na γ.

2. $(p, q) \in \gamma$ i oprócz (p, q) istnieje jedyny punkt z suppf_0, (oznaczmy go (k, l)), leżący na γ. (k, l) podobnie jak (p, q) jest wierzchołkiem γ. Na mocy Własności 2 (f_s) jest niezdegenerowana na γ.

3. $(p, q) \in \gamma$ i oprócz (p, q) istnieje więcej niż jeden punkt supp(f_s) leżący na γ. Rozważmy podprzypadki:

(i) $(p, q) \in \Gamma(f_0)$. Rozważmy wyróżnik $\Delta(s)$ formy ν_s odpowiadającej $(f_s)_\gamma$. Wartość $\Delta(0)$ jest równa wyróżnikowi formy odpowiadającej $(f_0)_\gamma$, a więc $\Delta(0) \neq 0$, bo f_0 jest niezdegenerowana na γ. Zatem $\Delta(s) \neq 0$ dla s z dostatecznie małego otoczenia zera. Z Własności 3, (f_s) jest niezdegenerowana na γ.

(ii) $(p, q) \notin \Gamma(f_0)$. Wtedy (p, q) jest końcem γ. W tym przypadku γ jest przedłużeniem pewnego odcinka $\gamma_0 \in \Gamma(f_0)$. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że (p, q) jest lewym końcem odcinka γ. Niech $(f_s)_\gamma(x, y) = (f_0)_\gamma(x, y) + sx^p y^q$. Na mocy Własności 1 wielomian $(f_s)_\gamma$ jest quasi-jednorodny. Oznaczmy przez d stopień tego wielomianu oraz przez m, n wagi zmiennych x i y. Z Twierdzenia 4 istnieje wielomian jednorodny ν_s i liczby r, $t \in \mathbb{N}$ takie, że

$$(f_s)_\gamma(x, y) = x^r y^t \nu_s(x^n, y^m) \quad \nu_s(0, y) \neq 0, \quad \nu_s(x, 0) \neq 0.$$

Stąd i z założenia $\nu_s(x, y)$ jest postaci

$$\nu_s(x, y) = sy^d + a_1 y^{d-1} x + \ldots + a_d x^d, \quad gdzie \quad a_d \neq 0.$$

Rozważmy wyróżnik $\Delta(s)$ formy ν_s odpowiadającej $(f_s)_\gamma$. Łatwo sprawdzamy, że $\Delta(s) = (d^d a_d^{d-1}) \cdot s^d +$ wyrazy stopnia niższego niż d. Ponieważ $a_d \neq 0$, więc $\deg_s \Delta(s) > 0$. Oznacza to, że $\Delta(s) \neq 0$ dla s z pewnego sąsiedztwa zera. Z Własności 3 (f_s) jest niezdegenerowana na γ. To kończy dowód.

Z Lematu 1 wynika, że dla dowolnej dogodnej i niezdegenerowanej osobliwości f_0 deformacja $f_s = f_0 + sx^p y^q$, $x^p y^q \in J$, $s \in U$ jest deformacją niezdegenerowaną. Oznaczamy ją $(f_s^{(p,q)})$.

Twierdzenie 5 *Jeżeli osobliwość f_0 jest niezdegenerowana i dogodna, to*

$$\lambda'(f_0) = \min_{x^p y^q \in J_0} \lambda((f_s^{(p,q)})),$$

gdzie przez $J_0 \subset J$ oznaczamy zbiór jednomianów $x^p y^q$ takich, że $\lambda((f_s^{(p,q)})) \neq 0$.

Dowód. Z definicji $\lambda'(f_0)$ musimy wykazać równość

$$\min_{(f_s) \in \mathcal{D}_0^{nd}(f_0)} (\mu(f_0) - \mu(f_s)) = \min_{x^p y^q \in J_0} (\mu(f_0) - \mu(f_0 + sx^p y^q)).$$

Nierówność "$\leqslant$" jest oczywista. Udowodnimy nierówność przeciwną "$\geqslant$". Weźmy dowolną niezdegenerowaną deformację $(f_s) \in \mathcal{D}_0^{nd}(f_0)$ osobliwości f_0.

Odpowiednio grupując wyrazy w (f_s) możemy zapisać ją następująco

$$f_s(x, y) = f_0(x, y) + c_1(s) x^{p_1} y^{q_1} + \ldots + c_k(s) x^{p_k} y^{q_k} + R(s, x, y),$$

$c_i \neq 0$, $c_i(0) = 0$, $(p_i, q_i) \in \Gamma(f_s)$, $i = 1, \ldots, k$, oraz supp$R$ leży powyżej łamanej Newtona szeregu f_s. Ponieważ $\lambda'((f_s)) > 0$, więc łatwo wykazujemy, że wśród punktów (p_i, q_i), $i = 1, \ldots, k$, istnieje taki punkt (p_j, q_j), że $\lambda'((f_0 + c_j(s)x^{p_j}y^{q_j})) > 0$. Pokażemy, że dla tego j

$$(\star) \qquad \mu(f_0) - \mu(f_0 + c_j(s)x^{p_j}y^{q_j}) \leqslant \mu(f_0) - \mu(f_s).$$

Istotnie, wystarczy wykazać, że

$$\mu(f_0 + c_j(s)x^{p_j}y^{q_j}) \geqslant \mu(f_s).$$

Niech S_1, S_2 będą polami odpowiadającymi deformacjom $(f_0 + c_j(s)x^{p_j}y^{q_j})$ i odpowiednio (f_s). Przez a_1, b_1 oraz a_2, b_2 oznaczamy odległość punktu $(0, 0)$ od części wspólnej $\Gamma(f_0 + c_j(s)x^{p_j}y^{q_j})$ odpowiednio $\Gamma(f_s)$ z osiami OX i OY. Ponieważ $(f_0 + c_j(s)x^{p_j}y^{q_j})$ i (f_s) są niezdegenerowane, więc wystarczy wykazać, że $2(S_1 - S_2) - (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2) \geqslant 0$.

Rozważmy możliwe przypadki:

1. Niech $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$. Oznaczmy przez (m_l, n_l), $l = 1, \ldots, t$, kolejne wierzchołki łamanej Newtona $\Gamma(f_0 + c_j(s)x^{p_j}y^{q_j})$, $c_j(s) \neq 0$. Z założenia $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$ wynika, że $t \geqslant 3$. Z przyjętych oznaczeń mamy, że $(m_1, n_1) = (0, b_1)$ oraz $(m_t, n_t) = (a_1, 0)$. Jeśli rozważymy teraz dwa trójkąty o wierzchołkach: $(0, b_1)$, $(0, b_2)$, (m_2, n_2) oraz $(a_1, 0)$, $(a_2, 0)$, (m_{t-1}, n_{t-1}), to oznaczając przez h_3, h_4 (h_3, $h_4 \geqslant 1$) ich wysokości opuszczone na bok $\overline{(0, b_1), (0, b_2)}$ i odpowiednio na bok $\overline{(a_1, 0), (a_2, 0)}$ mamy

$$\begin{aligned} 2(S_1 - S_2) - (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2) &\geqslant 2\Big(\frac{1}{2}(a_1 - a_2) \cdot h_4 + \frac{1}{2}(b_1 - b_2) \cdot h_3\Big) + \\ &\quad - (a_1 - a_2) - (b_1 - b_2) = \\ &= (a_1 - a_2) \cdot (h_4 - 1) + (b_1 - b_2) \cdot (h_3 - 1) \geqslant 0. \end{aligned}$$

2. Niech $a_1 > a_2$, $b_1 = b_2$. Przy tych samych oznaczeniach co w 1. mamy, że

$$\begin{aligned} 2(S_1 - S_2) - (a_1 - a_2) &\geqslant 2 \cdot \frac{1}{2}(a_1 - a_2) \cdot h_4 - (a_1 - a_2) = \\ &= (a_1 - a_2) \cdot (h_4 - 1) \geqslant 0. \end{aligned}$$

3. Gdy $a_1 = a_2$ i $b_1 > b_2$, to postępujemy analogicznie jak w przypadku 2.

4. Jeśli $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, to oczywiście $S_1 \geqslant S_2$ i wtedy $2(S_1 - S_2) \geqslant 0$. Zatem w każdym przypadku zachodzi $(\star)$. To kończy dowód.

Przykład 3 *Niech $f_0(x, y) = x^4 - y^3$. Obliczając skoki dla wszystkich deformacji $\lambda((f_s^{(p,q)}))$, $(p, q) \in J_0$, dostajemy, że dla deformacji $f_s(x, y) = x^4 - y^3 + sxy^2$, $\lambda((f_s)) = 1$. Zatem $\lambda'(f_0) = 1$.*

Wniosek 1 *Jeżeli f_0, $\tilde{f}_0$ są osobliwościami niezdegenerowanymi i dogodnymi oraz $\Gamma(f_0) = \Gamma(\tilde{f}_0)$, to $\lambda'(f_0) = \lambda'(\tilde{f}_0)$.*

5. FORMUŁA DLA NIEZDEGENEROWANEGO SKOKU LICZB MILNORA OSOBLIWOŚCI ZDEGENEROWANEJ

Dla zdegenerowanej osobliwości f_0 oznaczmy przez $\tilde{f}_0$ niezdegenerowaną osobliwość taką, że f_0 i $\tilde{f}_0$ mają ten sam diagram Newtona: $\Gamma_+(f_0) = \Gamma_+(\tilde{f}_0)$. Taka osobliwość $\tilde{f}_0$ zawsze istnieje. Niezdegenerowany skok zdegenerowanej osobliwości f_0 może być obliczony za pomocą następującego twierdzenia.

Twierdzenie 6 *Niech f_0 będzie osobliwością zdegenerowaną. Wtedy*

$$\lambda'(f_0) = \mu(f_0) - \mu(\tilde{f}_0).$$

Dowód. Ponieważ f_0 jest zdegenerowaną osobliwością więc na mocy Twierdzenia 1 i Twierdzenia 2, $\mathcal{D}_0^{nd} = \mathcal{D}^{nd}$. Z definicji skoku niezdegenerowanego mamy

$$\begin{aligned}\lambda'(f_0) &= \min_{(f_s)\in\mathcal{D}_0^{nd}(f_0)} (\mu(f_0) - \mu(f_s)) = \min_{(f_s)\in\mathcal{D}^{nd}(f_0)} (\mu(f_0) - \mu(f_s)) = \\ &= \min_{(f_s)\in\mathcal{D}^{nd}(f_0)} (\mu(f_0) - \mu(\tilde{f}_0) + \mu(\tilde{f}_0) - \mu(f_s)) = \\ &= (\mu(f_0) - \mu(\tilde{f}_0)) + \min_{(f_s)\in\mathcal{D}^{nd}(f_0)} (\mu(\tilde{f}_0) - \mu(f_s)).\end{aligned}$$

Na mocy Własności 3 łatwo znajdziemy deformację niezdegenerowaną (f_s) kiełka f_0 taką, że $\Gamma(f_s) = \Gamma(f_0)$. Ponieważ $\Gamma(f_0) = \Gamma(\tilde{f}_0)$, więc $\mu(f_s) = \mu(\tilde{f}_0)$ dla $s \neq 0$, czyli $\min_{(f_s)\in\mathcal{D}^{nd}(f_0)} (\mu(\tilde{f}_0) - \mu(f_s)) = 0$. Zatem

$$\lambda'(f_0) = \mu(f_0) - \mu(\tilde{f}_0).$$

To kończy dowód.

Przykład 4 *Niech $f_0(x,y) = y^3 + 2xy^2 + x^2y + x^4 = y(x+y)^2 + x^4$ będzie zdegenerowaną osobliwością. Wówczas $\mu(f_0) = 5$. Niech $\tilde{f}_0$ będzie niezdegenerowaną osobliwością taką, że $\Gamma_+(f_0) = \Gamma_+(\tilde{f}_0)$, np. $\tilde{f}_0 = y^3+x^2y+x^4$, dla której $\mu(\tilde{f}_0) = 4$. Na mocy powyższego twierdzenia mamy, że $\lambda'(f_0) = 1$.*

6. PRZYPADEK OSOBLIWOŚCI O JEDNYM ODCINKU DIAGRAMU NEWTONA

W pewnych przypadkach potrafimy podać dokładną wartość skoku niezdegenerowanego osobliwości. Ma to miejsce w przypadku, gdy łamana Newtona f_0 składa się z jednego odcinka. Zaczniemy od najprostszego przypadku.

Twierdzenie 7 *Niech $f_0(x,y) = x^p - y^q$, $p, q \geqslant 2$ i $d := \mathrm{NWD}(p,q)$. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $p \geqslant q$.*

1. *Jeśli $1 \leqslant d < q \leqslant p$, to $\lambda'(f_0) = d$.*
2. *Jeśli $d = q$, to $\lambda'(f_0) = q - 1$.*

Dowód. 1. Z własności największego wspólnego dzielnika wynika, że istnieją liczby całkowite a, b takie, że

$$ap + bq = d.$$

Możemy założyć, że $a > 0$, $b < 0$ i $a < q$. Weźmy pod uwagę jednomian $x^{-b}y^{q-a}$. Należy on do J, gdyż $-b > 0$, $q - a > 0$ i punkt $(-b, q - a)$ leży poniżej prostej $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ wyznaczonej przez jedyny odcinek łamanej Newtona f_0. Ponadto jest on elementem J_0, gdyż pole trójkąta o wierzchołkach $(p, 0)$, $(0, q)$ i $(-b, q - a)$ jest równe $\frac{d}{2}$, a więc na mocy Stwierdzenia 2 mamy

$$\lambda'(f_0) \leqslant d.$$

Z drugiej strony weźmy dowolny jednomian $x^r y^{q-s} \in J_0$, $r \geqslant 0$, $q - s \geqslant 0$ i $r + (q - s) > 0$. Wówczas pole trójkąta o wierzchołkach $(p, 0)$, $(0, q)$, $(r, q - s)$ jest równe

$$\frac{|-sp + rq|}{2} \geqslant \frac{d}{2}.$$

Łatwo policzyć, że

$$\lambda'(f_0) \geqslant d.$$

Łącznie

$$\lambda'(f_0) = d.$$

2. Zauważmy najpierw, że dla punktu $(p - 1, 0)$ mamy $\lambda'((f_s^{(p-1,0)})) = 2(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot q) - 1 = q - 1$. Zatem $\lambda'(f_0) \leqslant q - 1$. Z drugiej strony, biorąc dowolny punkt postaci $(p - m, 0)$, $m = 2, \ldots, p - 1$ otrzymujemy, że $\lambda'((f_s^{(p-m,0)})) = 2(\frac{1}{2} \cdot m \cdot q) - m = m(q - 1) > q - 1$. Podobnie dla punktu postaci $(0, q - m)$, $m = 1, \ldots, q-1$ otrzymujemy, że $\lambda'((f_s^{(0,q-m)})) = 2(\frac{1}{2} \cdot m \cdot p) - m = m(p-1) \geqslant q-1$.

Rozważmy teraz punkt $(-u, q - w) \in J_0$ taki, że $-u > 0$, $q - w > 0$. Wtedy $\lambda'((f_s^{(-u,q-w)})) = |-up - wq| = q|\frac{up}{q} + w| \geqslant q > q - 1$. To kończy dowód.

Przykład 5 *Niech* $f_0(x, y) = x^4 - y^4$. *Na mocy powyższego twierdzenia* $\lambda'(f_0) = 3$. *Skok ten realizuje deformacja* $f_s(x, y) = x^4 - y^4 + sx^3$.

Rozważmy teraz ogólny przypadek osobliwości, której łamana Newtona składa się z jednego odcinka.

Twierdzenie 8 *Niech* f_0 *będzie niezdegenerowaną i dogodną osobliwością o łamanej Newtona złożonej z jednego odcinka. Wówczas tym odcinkiem jest odcinek łączący punkty* $(p, 0)$ *i* $(0, q)$ *dla pewnych* $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q \geqslant 2$. *Ponadto, jeśli* $d = \mathrm{NWD}(p, q)$, *to:*

1. *jeśli* $1 \leqslant d < \min(p, q)$, *to* $\lambda'(f_0) = d$.

2. Jeśli $d = \min(p, q)$*, to* $\lambda'(f_0) = \min(p, q) - 1$.

Dowód. Pierwsza część twierdzenia jest oczywista, druga wynika z Wniosku 1 i Twierdzenia 7.

7. PRZYPADEK OSOBLIWOŚCI O WIELU ODCINKACH DIAGRAMU NEWTONA O GŁADKICH SKŁADOWYCH

W dalszym ciągu rozważań zastosujemy następujące znane twierdzenie o rozkładzie szeregu f_0 na czynniki związane z poszczególnymi odcinkami jego diagramu Newtona. Dla $\gamma \in \Gamma(f_0)$ niech $|\alpha|$, $|\beta|$ będą długościami rzutów odcinka γ na oś OX i odpowiednio OY.

Twierdzenie 9 (Płoski [5]) *Jeżeli* f_0 *jest szeregiem dogodnym o łamanej* $\Gamma(f_0)$*, składającej się z odcinków* $\gamma_1, \dots, \gamma_k$*, to istnieje rodzina szeregów dogodnych* $((f_0)_i)_{i=1,\dots,k}$ *taka, że*

1. $f_0 = \prod_{i=1}^k (f_0)_i$,
2. *łamana Newtona szeregu* $(f_0)_i$ *składa się z jednego odcinka łączącego punkty* $(|\alpha_i|, 0)$ *oraz* $(0, |\beta_i|)$,
3. $\mathrm{in}(f_0, \gamma_i) = x^p y^q \cdot \mathrm{in}((f_0)_i, \gamma_i)$*, dla pewnych* $p, q \geqslant 0$.

Zachodzi oczywisty

Lemat 2 *Dla dowolnego* $i \in \{1, \dots, k\}$*,* $(f_0)_i$ *jest gładki wtedy i tylko wtedy, gdy* $|\alpha_i| = 1$ *lub* $|\beta_i| = 1$.

W przypadku, gdy $(f_0)_i$, $i = 1, \dots, k$ opisane w Twierdzeniu 9 są gładkie, to potrafimy podać dokładną wartość skoku niezdegenerowanego.

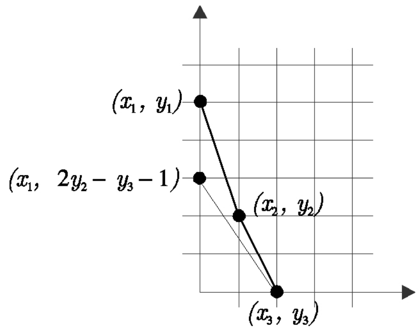
Twierdzenie 10 *Niech* $f_0 = \prod_{i=1}^k (f_0)_i$*,* $k \geqslant 2$ *będzie rozkładem niezdegenerowanej i dogodnej osobliwości* f_0 *według odcinków* γ_i *diagramu Newtona opisanym w Twierdzeniu 9. Jeśli wszystkie* $(f_0)_i$ *są gładkie, to* $\lambda'(f_0) = 1$.

Dowód. Oznaczmy przez (x_i, y_i) i - ty wierzchołek $\Gamma(f_0)$ licząc od lewej strony, $i = 1, \dots, k+1$. Zatem ilość odcinków $\Gamma(f_0)$ jest równa k. Rozważmy możliwe przypadki:

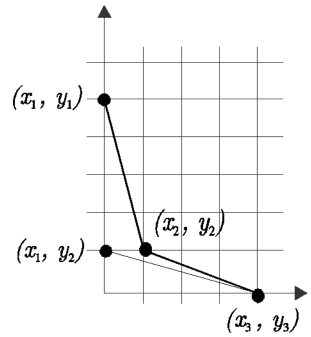
1. $k = 2$. Rozważmy podprzypadki:

1a. $x_2 - x_1 = 1$ i $x_3 - x_2 = 1$. Zauważmy, że punkt $(x_1, 2y_2 - y_3 - 1)$ (patrz rys. 1) realizuje skok $\lambda'(f_0) = 1$.

1b. $x_2 - x_1 = 1$ i $y_2 - y_3 = 1$. Zauważmy, że punkt (x_1, y_2) (patrz rys. 2) realizuje skok $\lambda'(f_0) = 1$.



***rys.* 1**

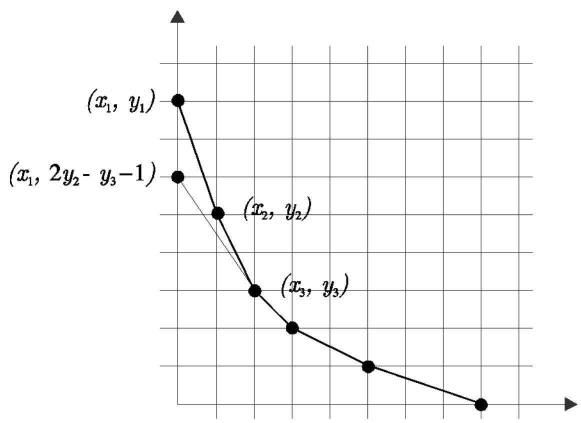


***rys.* 2**

1c. Jeśli $y_1 - y_2 = 1$ i $y_2 - y_3 = 1$, to postępujemy podobnie jak w przypadku 1a.

2. $k \geqslant 3$. Rozważmy podprzypadki:

2a. $x_2 - x_1 = 1$ i $x_3 - x_2 = 1$. Wówczas punkt $(x_1, 2y_2 - y_3 - 1) \in J_0$ realizuje skok $\lambda'(f_0) = 1$.



2b. $y_k - y_{k+1} = 1$ i $y_{k-1} - y_k = 1$. Wówczas punkt $(2x_k - x_{k-1} - 1, y_{k+1})$ realizuje skok $\lambda'(f_0) = 1$.

2c. Gdy $x_2 - x_1 = 1$ i $y_2 - y_3 = 1$, to postępujemy analogicznie jak w 1b. , bo wtedy $y_3 - y_4 = \ldots = y_k - y_{k+1} = 1$. To kończy dowód.

Przykład 6 *Dla* $f_0(x, y) = (x + y^4)(x + y^2)(x^2 + y)$ *deformacja* $f_s(x, y) = (x + y^4)(x + y^2)(x^2 + y) + sy^4$ *realizuje skok równy* 1.

W drugiej części pracy rozważymy przypadek osobliwości, w rozkładzie której występują czynniki niegładkie. Podamy oszacowania niezdegenerowanych skoków liczb Milnora w terminach skoków jej czynników. Rozważymy również problem wyznaczania skoków dla osobliwości niedogodnych.

Literatura

[1] A.Bodin, *Jump of Milnor numbers*, preprint arXiv:math. AG/0502052 v2, (2005).

[2] S.Gusein-Zade, *On singularities from which an A_1 can be split off*, Funct. Anal. Appl. 27, (1993), 57-59, (in Russian).

[3] A.Kouchnirenko, *Polyédres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. Math.32, (1976), 1-31.

[4] S. Łojasiewicz, *Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej*, PWN, Warszawa 1988.

[5] A. Płoski, *Szeregi Puiseux, diagramy Newtona i odwzorowania holomorficzne płaszczyzny* $\mathbb{C}^2$, Materiały z X Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, 1989.

[6] A. Płoski, A. Lenarcik, E. Barroso, *Characterization of non-degenerate plane curve singularities*, preprint arXiv:math. AG/0711.2833 v1, (2007).

[7] J.C. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag 1972.

Jumps of Milnor numbers in families of singularities I

Summary. In the article, based on the preprint [1] by A. Bodin, the problem of calculation of minimal non-zero difference between the Milnor numbers of a plane curve singularitity and its non-degenerate deformation is studied.

Łódź, 7 – 11 stycznia 2008 r.