Orbity i osobliwości

(działania grup liniowych na macierzach)

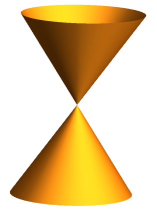
Andrzej Weber
Uniwersytet Warszawski

Łódź, styczeń 2024

⊛ Działanie

- Orbita działania grupy G na zbiorze X

$$G \cdot x = \{g \cdot x \in X \mid g \in G\} \simeq G/G_x$$



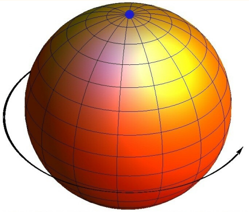
- Przykład 1:
$X =$ macierze symetryczne 2×2,
$G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

- Jest 6 orbit.

- Przykład 2: $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$
- Działanie $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ przez homografie

- Działanie $\mathbb{C}^*$ (3 orbity)

- Działanie podgrupy Borela $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ (2 orbity)



⊛ Grassmannian i klatki Schuberta

- Grassmannian jest przestrzenią jednorodną ze względu na działanie GL_n
- $Gr_2(\mathbb{C}^4) = \{\text{płaszczyzny przechodzące przez 0 w } \mathbb{C}^4\}$
- 6 orbit działania grupy B_4=macierze górnotrójkątne
- $Y = \{V \subset \mathbb{C}^4 \;:\; \dim(V \cap \mathbb{C}^2_{1,2}) > 0\}$ jest sumą 5 orbit
- $Y^o = \left\{ V \subset \mathbb{C}^4 \;:\; \begin{array}{c} \dim(V \cap \mathbb{C}_1) = 0, \\ \dim(V \cap \mathbb{C}^2_{1,2}) = 1, \\ \dim(V \cap \mathbb{C}^3_{1,2,3}) = 2 \end{array} \right\}$ jest otwartą i gęstą B_4-orbitą w Y.
- Lokalne równanie: Jeśli $V = graph\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \mathbb{C}^2_{1,2} \to \mathbb{C}^2_{3,4}\right)$

$$V \in Y \iff ad - bc = 0\,.$$

⊛ Macierzowe rozmaitości Schuberta

⊙ Zamiast badać orbity działania B na grassmannianach, przestrzeniach flag itp., badamy orbity działania $B \times B$ na macierzach

⊙ 2 orbity działania

$$B_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

na $\mathbb{P}^1 = \mathrm{GL}_2/B_2$

- $B_2 \cdot [1:0] = \{[1:0]\}$
- $B_2 \cdot [0:1] = \mathbb{P}^1 \setminus \{[1:0]\}$
  $= \{[b:d] \ : \ d \neq 0\}$

⊙ Orbity działania $B_2 \times B_2$ na $M_{2\times 2}$:

⊙ Orbity macierzy rzędu 2

- $B_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B_2 =$
  $= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} : \ ad \neq 0 \right\}$
- $B_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} B_2 =$
  $= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : \ c \neq 0, ad - bc \neq 0 \right\}$

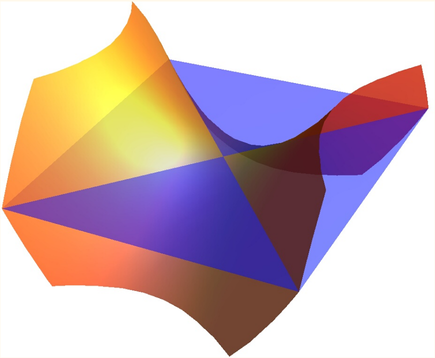
⊙ oraz 5 orbit macierzy niższych rzędów.

⊛ Brzeg otwartej orbity w $M_{2\times 2}$:

$$(c=0)\vee(ad-bc=0)$$

- Suma kwadryki w $\mathbb{C}^4$ i stycznej hiperpałaszczyzny
- To jest stożek afiniczny nad zbiorem w $\mathbb{P}^3$
- We współrzędnych afinicznych, w mapie $b=1$

$$(c=0)\vee(c=ad)$$



⊛ Równanie $X^2 = 0$

- W postaci Jordana mamy jedynie bloki $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$.

- Działamy grupą macierzy górnotrójkątnych B_n przez sprzęganie

$$A^2 = 0 \iff (bAb^{-1})^2 = 0$$

- Jest skończenie wiele B_n-orbit.

- Zbiór górnotrójkątnych 2-nilpotentnych macierzy

$$\{A \in M_{n \times n} \ : \ A^2 = 0\} \cap \mathfrak{b}_n$$

jest B_n-niezmienniczy.

- Jakie są jego składowe? – rozmaitości orbitalne

- Jaki jest rozkład na orbity?

⊛ Przykład: A górnotrójkątna, $A^2 = 0$

- Wyrazy na przekątnej: $a_{i,i} = 0$
- Niech $n = 4$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{12}a_{23} = 0\,, \quad a_{23}a_{34} = 0\,, \quad a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34} = 0$$

- Pierwsza składowa $a_{23} = 0$

$$a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34} = 0$$

- Druga składowa $a_{12} = 0$

$$a_{23}a_{34} = 0\,, \quad a_{13}a_{34} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{34} = 0$$

⊛ Składowe zbioru $\{A^2 = 0\} \subset B_4$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

⊙ $a_{23} = 0, \quad a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34} = 0$

Stożek w $\mathbb{C}^4$ razy $\mathbb{C}$

⊙ $a_{12} = 0, \quad a_{34} = 0$

Macierze 2 × 2

⊛ Klasyfikacja 2-nilpotentnych B_n-orbit

⊙ **Twierdzenie:** W każdej orbicie jest dokładnie jedna macierz składająca się z 0 i 1, „częściowa permutacja”

⊙ Przykład 8×8:

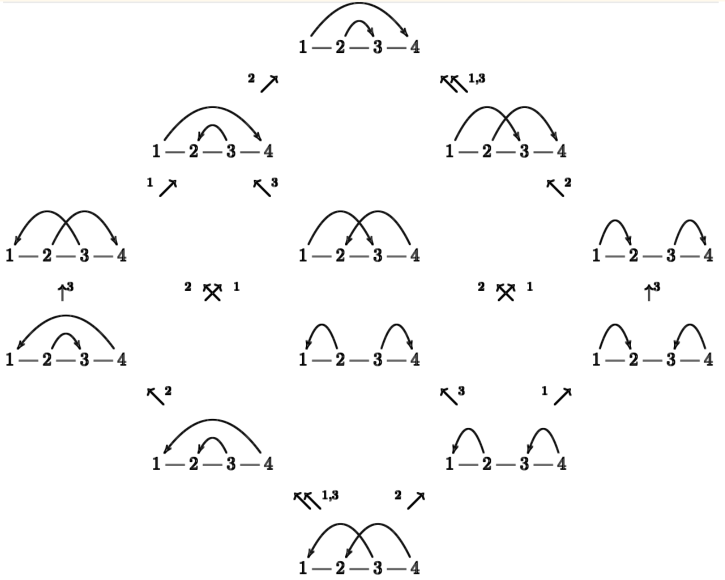
$$6 \mapsto 2 \mapsto 0, \quad 7 \mapsto 4 \mapsto 0, \quad 1, 3, 5, 8 \mapsto 0$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] & 4 \arrow[r, dash] & 5 \arrow[r, dash] & 6 \arrow[r, dash] \arrow[llll, bend right] & 7 \arrow[r, dash] \arrow[lll, bend right] & 8
\end{tikzcd}$$

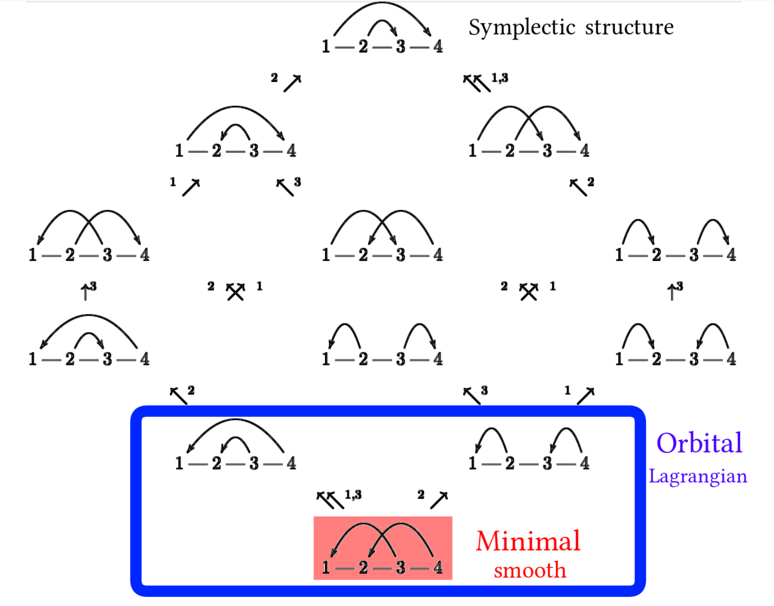
$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Bruhat $\subset$ Renner $\subset$ Melnikov $\subset$ Boos & Reineke

⊛ B_4-orbity $A^2 = 0$, $rk(A) = 2$ w $M_{4\times 4}$

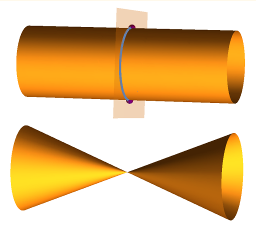


⊛ B_4-orbity $A^2 = 0$, $rk(A) = 2$ w $M_{4\times 4}$



⊛ Rozwiązanie osobliwości: Bott-Samelson

$$a_{23} = 0, \quad a_{12}a_{24} + a_{13}a_{34} = 0$$



$$1 — 2 \leftrightarrow 3 — 4 \quad \overset{s_2}{\longmapsto} \quad 1 — 2 — 3 — 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -wx & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & wz \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

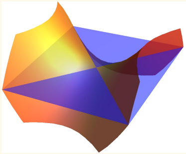
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x & -wx & y \\ 0 & 0 & 0 & wz \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⊛ Rozwiązanie brzegu otwartej orbity $M_{2\times 2}$

$$1 \leftrightarrow 2 - 3 - 4 \quad \xmapsto{s_1} \quad 1 - 2 - 3 - 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ w & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & wx & wy+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Równania $c = 0$ i $ad - bc = 0$ stają się



$$wx = 0\,, \qquad xz = 0$$

$$\begin{pmatrix} w & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & wx & wy+z \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Równania $c = 0$ i $ad - bc = 0$ stają się

$$x = 0\,, \qquad xz = 0$$

⊛ Rozwiązanie domknięcia orbity

⊙ Niech $X = \overline{B_n \pi \bullet (\text{minimalna orbita } X_{min})}$

⊙ $\pi = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_\ell}$ minimalna prezentacja za pomocą elementarnych transpozycji.

⊙ **Twierdzenie.** Naturalne przekształcenie

$$X_{\underline{\pi}} := P_{i_1} \times^B P_{i_2} \times^B \cdots \times^B P_{i_\ell} \times^B X_{min} \longrightarrow X$$

jest rozwiązaniem osobliwości pary $(X, \partial X)$, gdzie

$$P_i = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & & & & & \bullet & \bullet \\ & & & & & & \bullet \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad P_i/B \simeq \mathbb{P}^1$$

[Bender & Perrin] ⇐ Brion, [Knutson & Zinn-Justin]

⊙ $X_{\underline{\pi}} = \mathbb{P}^1 \widetilde{\times} \mathbb{P}^1 \widetilde{\times} \ldots \widetilde{\times} \mathbb{P}^1 \widetilde{\times} X_{min}$ jest „wieżą rozwłóknień”

⊙ Indukcyjne obliczenia niezmienników orbit (klasy w kohomologiach, K-teorii, klasy charakterystyczne)

⊛ Działanie algebry Hecke

i tu dopiero zaczyna się cała historia

Koniec

The End