

Skoki liczb Milnora osobliwości quasijednorodnych krzywych w klasie deformacji liniowych

The jump of Milnor number for linear deformations of
quasihomogeneous singularities

Aleksandra Zakrzewska

Wydział Matematyki i Informatyki UŁ

styczeń 2022

XLII KONFERENCJA I WARSZTATY “GEOMETRIA
ANALITYCZNA I ALGEBRAICZNA”

Osobliwość krzywej

Mówimy, że $f_0 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ jest **osobliwością izolowaną**, jeżeli f_0 jest kielkiem funkcji holomorficznej takim, że istnieje funkcja $\widehat{f}_0 : U \rightarrow \mathbb{C}$, będąca reprezentantem tego kielka f_0 , określona w otwartym otoczeniu U punktu $0 \in \mathbb{C}^n$ spełniająca warunki:

- 1 $\widehat{f}_0(0) = 0$,
- 2 $\nabla \widehat{f}_0(0) = 0$,
- 3 $\nabla \widehat{f}_0(z) \neq 0$ dla $z \in U \setminus \{0\}$.

W powyższej definicji przyjmujemy, że $\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)$. W dalszym ciągu przez osobliwość będziemy rozumieć osobliwość izolowaną.

Deformacja osobliwości

Deformacją osobliwości f_0 nazywamy kieltek funkcji holomorficznej $f = f(s, z) : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ taki, że

- 1 $f(0, z) = f_0(z)$,
- 2 $f(s, 0) = 0$.

Deformację $f(s, z)$ osobliwości f_0 traktujemy jako rodzinę (f_s) kielków, $f_s(z) := f(s, z)$.

Liczba Milnora

Ponieważ f_0 jest izolowaną osobliwością, f_s ma tylko izolowane osobliwości blisko 0, dla wystarczająco małych s . Zatem dla wystarczająco małych s możemy zdefiniować liczbę μ_s

$$\mu_s := \mu(f_s) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / (\nabla f_s)$$

zwaną **liczbą Milnora**, gdzie \mathcal{O}_n jest pierścieniem kielków funkcji holomorficzných określonych w otoczeniu 0, natomiast (∇f_s) jest ideałem w \mathcal{O}_n generowanym przez ∇f_s .

Skok liczby Milnora

Ponieważ liczba Milnora jest półciągła z góry w topologii Zariskiego w rodzinie osobliwości, zatem istnieje otoczenie S punktu 0 takie, że

- 1 $\mu_s = \text{const.}$ dla $s \in S \setminus \{0\}$,
- 2 $\mu_0 \geq \mu_s$ dla $s \in S$.

Stałą różnicę $\mu_0 - \mu_s$ (dla $s \neq 0$) nazywamy **skokiem liczby Milnora deformacji** (f_s) i oznaczamy $\lambda((f_s))$. Najmniejsza niezerowa wartość wśród skoków deformacji osobliwości f_0 nazywana jest skokiem liczby Milnora f_0 i oznaczana $\lambda(f_0)$.

Skok liczby Milnora

Ponieważ liczba Milnora jest półciągła z góry w topologii Zariskiego w rodzinie osobliwości, zatem istnieje otoczenie S punktu 0 takie, że

- 1 $\mu_s = \text{const.}$ dla $s \in S \setminus \{0\}$,
- 2 $\mu_0 \geq \mu_s$ dla $s \in S$.

Stałą różnicę $\mu_0 - \mu_s$ (dla $s \neq 0$) nazywamy **skokiem liczby Milnora deformacji** (f_s) i oznaczamy $\lambda((f_s))$. Najmniejsza niezerowa wartość wśród skoków deformacji osobliwości f_0 nazywana jest skokiem liczby Milnora f_0 i oznaczana $\lambda(f_0)$. Sabir Gusein-Zade, który udowodnił istnienie osobliwości f_0 dla której $\lambda(f_0) > 1$.

Główne zagadnienie pracy

Będę badać osobliwości krzywych tzn. $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.
Głównym tematem pracy jest skok liczb Milnora
quasijednorodnych i semi-quasijednorodnych osobliwości w
klasie **deformacji liniowych** f_0 tzn. deformacji postaci
 $f_s = f_0 + sg$, gdzie g jest holomorficzną funkcją określoną w
otoczeniu 0 taką, że $g(0) = 0$. Najmniejsza niezerowa wartość
wśród skoków deformacji liniowych osobliwości f_0 oznaczamy
 $\lambda^{lin}(f_0)$.

Jako narzędzie do badania tych skoków używać będę
diagramów Enriquesa oraz wyniku M. Alberich-Carraminñany
i J.Roé którzy podali warunek konieczny i wystarczający, na to
aby dwa diagramy Enriquesa były liniowo przyległe.

Dotychczasowe wyniki dotyczące skoków Milnora

W mojej pracy doktorskiej uzyskałam następujący rezultat dla osobliwości jednorodnych i semi-jednorodnych:

Twierdzenie

Dla dowolnej jednorodnej(semi-jednorodnej) osobliwości f_0 ($n \geq 2$) skok liczby Milnora dla deformacji liniowych jest równy

$$\lambda^{lin}(f_0^n) = \begin{cases} n - 2, & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases} .$$

Diagram Enriquesa

Dowolnej osobliwości izolowanej przypisujemy jej **diagram Enriquesa** z wagami (D, ν) odzwierciedlający etapy rozwiązania tej osobliwości. Jest to graf (drzewo) skończony z dwoma rodzajami krawędzi i wagami wierzchołków.

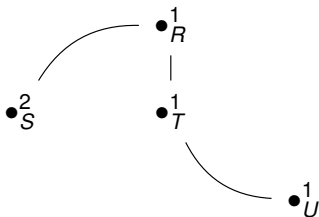


Figure: Diagram Enriquesa osobliwości $g(x, y) = x^2 - y^3$.

Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

Za pomocą aksjomatów można wprowadzić pojęcie **abstrakcyjnych diagramów Enriquesa** jako drzewo wraz z relacją najbliższości pomiędzy wierzchołkami.

Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

Za pomocą aksjomatów można wprowadzić pojęcie **abstrakcyjnych diagramów Enriquesa** jako drzewo wraz z relacją najbliższości pomiędzy wierzchołkami.
Każdy diagram Enriquesa osobliwości krzywej jest abstrakcyjnym diagramem Enriquesa.

Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

Liczby nad wierzchołkami, to ich wagi.

$$\nu(S) = 2, \nu(R) = 1, \nu(T) = 1, \nu(U) = 1$$

Pomiędzy wierzchołki określona została relacja najbliższości.

$$R \rightarrow S, T \rightarrow R, T \rightarrow S, U \rightarrow T$$

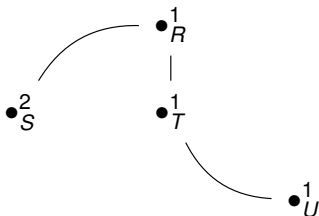


Figure: Abstrakcyjny diagram Enriquesa

Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

Rodzaje wierzchołków nazywamy różnie ze względu na relację najbliższości.

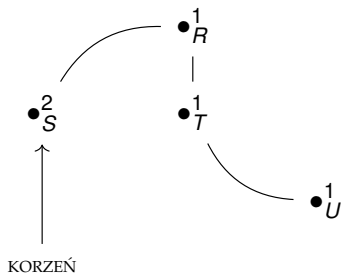


Figure: Abstrakcyjny diagram Enriquesa

Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

Rodzaje wierzchołków nazywamy różnie ze względu na relację równoważności.

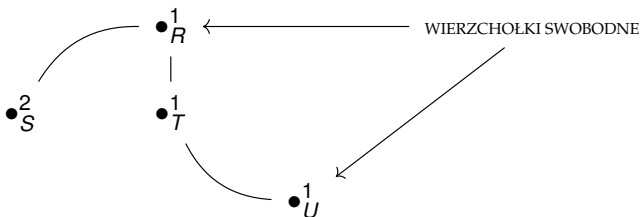


Figure: Abstrakcyjny diagram Enriquesa

Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

Rodzaje wierzchołków nazywamy różnie ze względu na relację równoważności.

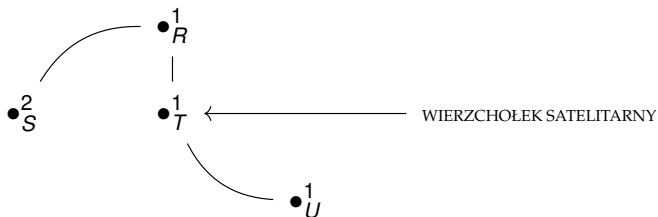


Figure: Abstrakcyjny diagram Enriquesa

Diagramy zgodne i liczba Milnora diagramu

Definicja

Zgodnym diagramem Enriquesa nazywamy diagram dla którego spełniona jest nierówność $P \in D$

$$\nu(P) \geq \sum_{Q \rightarrow P} \nu(Q).$$

Typy diagramów i diagramy minimalne

Definicja

*Dwa diagramy Enriquesa nazywamy **równoważnymi**, gdy różnią się co najwyżej wierzchołkami swobodnymi krotności 1.*

Typy diagramów i diagramy minimalne

Definicja

Dwa diagramy Enriquesa nazywamy **równoważnymi**, gdy różnią się co najwyżej wierzchołkami swobodnymi krotności 1. Klasę abstrakcji powyższej równoważności nazywamy **typem** i oznaczamy $[(D, \nu)]$.

Typy diagramów i diagramy minimalne

Definicja

Dwa diagramy Enriquesa nazywamy **równoważnymi**, gdy różnią się co najwyżej wierzchołkami swobodnymi krotności 1. Klasę abstrakcji powyższej równoważności nazywamy **typem** i oznaczamy $[(D, \nu)]$.

Definicja

Zgodny diagram Enriquesa (D, ν) nazywamy **minimalnym**, gdy:

- nie ma wierzchołków swobodnych krotności 0,
- nie ma wierzchołków swobodnych krotności 1, poza takimi, do których najbliższy jest jakiś wierzchołek satelitarny.

Przykład

Zdefiniujmy diagramy (D, ν) , (D', ν') następująco:

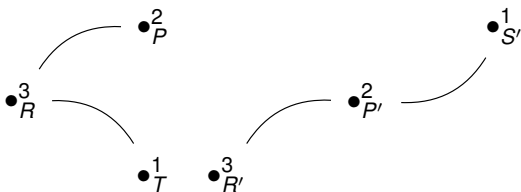


Figure: Diagramy (D, ν) i (D', ν') .

Wówczas $[(D, \nu)] = [(D', \nu')]$.

Minimalne diagramy abstrakcyjne a diagramy Enriquesa osobliwości

Twierdzenie

- *Niech (D, ν) będzie zgodnym diagramem Enriquesa. Istnieje dokładnie jeden minimalny diagram w klasie $[(D, \nu)]$.*
- *Dla każdego zgodnego diagramu (D, ν) istnieje osobliwość f_0 o diagramie Enriquesa (D_{f_0}, ν_{f_0}) taka, że $(D_{f_0}, \nu_{f_0}) \in [(D, \nu)]$.*

Zatem istnieje bijekcja między minimalnymi diagramami Enriquesa a diagramami Enriquesa osobliwości.

Diagramy zgodne i liczba Milnora diagramu

Definicja

Dla zgodnego diagramu Enriquesa (D, ν) definiujemy **liczbę Milnora diagramu** (D, ν) przez

$$\mu((D, \nu)) = \sum_{P \in D} \nu(P)(\nu(P) - 1) + 1 - r,$$

gdzie

$$r = \sum_{P \in D} \left(\nu(P) - \sum_{Q \rightarrow P} \nu(Q) \right).$$

Liczba r jest liczbą gałęzi diagramu Enriquesa osobliwości krzywej.

Przykład

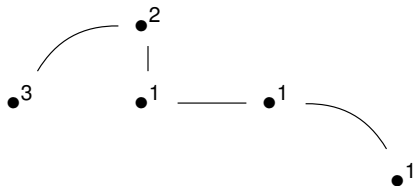


Figure: Diagrama Enriquesa osobliwości $g(x, y) = x^3 - y^5$.

Przykład

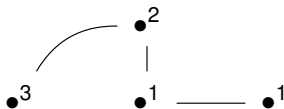


Figure: Minimalny diagram Enriquesa osobliwości $g(x, y) = x^3 - y^5$.

$$r = 1$$

$$\mu(g) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 - r = 8$$

Liniowa przyległość diagramów

M. Alberich-Carramiñana i J. Roé w swojej pracy podali warunek konieczny i wystarczający, aby dwa typy diagramów Enriquesa były liniowo przyległe:

Liniowa przyległość diagramów

M. Alberich-Carramiñana i J. Roé w swojej pracy podali warunek konieczny i wystarczający, aby dwa typy diagramów Enriquesa były liniowo przyległe:

Definicja

Niech $[(D, \nu)]$ i $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ będą typami diagramów Enriquesa. $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ jest **liniowo przyległy** do $[(D, \nu)]$ gdy istnieje zgodny diagram Enriquesa $(D', \nu') \in [(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ taki, że $(D', \nu') \geq (D_{min}, \nu_{min})$, gdzie (D_{min}, ν_{min}) jest minimalnym diagramem typu $[(D, \nu)]$.

Liniowa przyległość diagramów

Twierdzenie

Niech $[(D, \nu)]$ i $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ będą typami zgodnych diagramów Enriquesa. Następujące warunki są równoważne:

- 1 $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ jest liniowo przyległy do $[(D, \nu)]$.
- 2 Dla dowolnej osobliwości f_0 , której diagram Enriquesa należy do $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$, istnieje liniowa deformacja (f_s) osobliwości f_0 taka, że diagram Enriquesa generycznego elementu f_s należy do $[(D, \nu)]$.
- 3 Istnieje osobliwość f_0 , której diagram Enriquesa należy do $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ i liniowa deformacja (f_s) osobliwości f_0 taka, że diagram Enriquesa generycznego elementu f_s należy do $[(D, \nu)]$.

Własności

Wniosek

- 1 *Aby sprawdzić czy jedna osobliwość jest liniową deformacją drugiej wystarczy porównać ich diagramy Enriquesa.*
- 2 *Liniowa przyległość zależy tylko od topologicznego typu osobliwości.*
- 3 *$\lambda^{lin}(f_0)$ jest niezmiennikiem topologicznym.*

Osobliwość quasijednorodna

Mówimy, że osobliwość $f_0(x, y) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} a_{i,j} x^i y^j$ jest **osobliwością quasijednorodną**, jeżeli istnieją wagi $w_x, w_y \in \mathbb{N}$ i $D \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $(i, j) \in \text{supp}(f_0)$ zachodzi $iw_x + jw_y = D$, gdzie $\text{supp}(f_0) = \{(i, j) \in \mathbb{N} : a_{i,j} \neq 0\}$. Bez zmniejszenia ogólności, możemy założyć, że f_0 jest postaci:

$$f_0(x, y) = x^k y^l (x^p + \dots + \gamma_{i,j} x^i y^j + \dots + y^q),$$

$$k, l \in \{0, 1\}, p \leq q, k + l + p \geq 2,$$

gdzie dla każdego niezerowego wyrazu $\gamma_{i,j} x^i y^j$ spełniona jest równość $iw_x + jw_y = D$. Dodatkowo założymy, że $p \neq q$, gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy do czynienia z osobliwością jednorodną.

Osobliwość quasijednorodna

Jeżeli $k = l = 0$ to diagram Enriquesa osobliwości quasijednorodnej wygląda następująco:

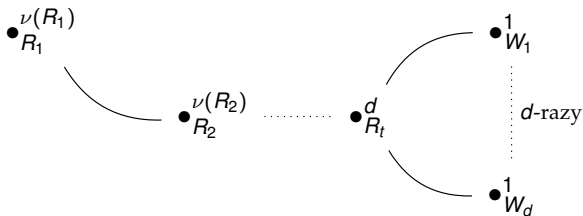


Figure: Diagram Enriques osobliwości f_0 gsy $k = l = 0$.

Liczba d to $NWD(p, q)$.

Osobliwość quasijednorodna

Aby otrzymać diagram Enriquesa dowolnej osobliwości quasijednorodnej, należy dodać krawędzie odpowiadające czynnikom x i y w rozkładzie f_0 .

Osobliwość quasijednorodna

Aby otrzymać diagram Enriquesa dowolnej osobliwości quasijednorodnej, należy dodać krawędzie odpowiadające czynnikom x i y w rozkładzie f_0 .

Te nowe krawędzie wychodzą albo z korzenia (gdy $l = 1$) albo z ostatniego swobodnego wierzchołka spośród R_1, \dots, R_t (gdy $k = 1$). Oczywiście należy wówczas zmienić odpowiednio wagi wierzchołków.

Osobliwość quasijednorodna

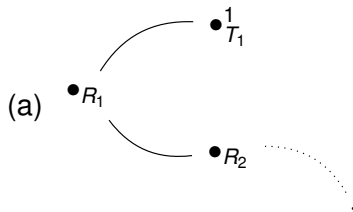


Figure: Diagram Enriques osobliwości quasijednorodnej, gdy $l = 1$.

Osobliwość quasijednorodna

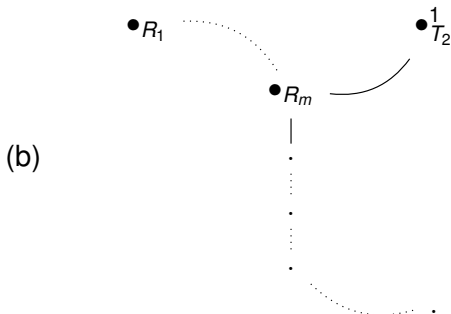


Figure: Diagram Enriques osobliwości quasijednorodnej, gdy $k = 1$ i $p \nmid q$.

Osobliwość quasijednorodna

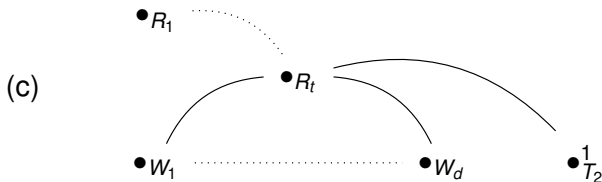


Figure: Diagram Enriques osobliwości quasijednorodnej, gdy $k = 1$ i $p|q$.

Rodzina Q_d^t

Dla ustalonego $d, t \in \mathbb{N}$, $dt > 1$ diagramy z poprzednich slajdów tworzą rodzinę Q_d^t .

Dla dowolnego diagramu (D, ν) z Q_d^t istnieje osobliwość quasijednorodna taka, że $d = NWD(p, q)$ i (D, ν) jest tego samego typu co diagram tej osobliwości. Z drugiej strony dla dowolnej osobliwości quasijednorodnej jej istnieje diagram $(D, \nu) \in Q_d^t$ tego samego typu co diagram tej osobliwości.

W szczególnym przypadku dla $t = 1$ zbiór Q_d^t reprezentuje osobliwości jednorodne. Natomiast dla $d = 1$ nierozkładane (pod warunkiem, że ominiemy czynnik $x^k y^l$).

Liczba w_D

Dla dowolnego $(D, \nu) \in Q_d^t$ definiujemy w_D jako liczbę wierzchołków do których R_t jest najbliższy.

Jeśli f_0 jest osobliwością quasijednorodną, wtedy

$$w_D = \begin{cases} 0, & \text{gdy } p = q \\ 1, & \text{gdy } p \neq q \text{ i } p|q \\ 2, & \text{gdy } p \nmid q \end{cases} .$$

Oszacowanie z góry liczby Milnora

Twierdzenie

Niech $d, t \in \mathbb{N}$, $dt > 1$ i $(D, \nu) \in Q_d^t$. Istnieje minimalny diagram Enriquesa $(E, \lambda) \notin [(D, \nu)]$ taki, że $[(D, \nu)]$ jest liniowo przyległy do $[(E, \lambda)]$ i

$$\mu((E, \lambda)) = \begin{cases} \mu((D, \nu)) - 1, & \text{gdy } d = 1 \\ \mu((D, \nu)) - 1, & \text{gdy } d = 2, w_D = 0 \\ \mu((D, \nu)) - w_D, & \text{gdy } d = 2, w_D \neq 0 \\ \mu((D, \nu)) - (d - 2 + w_D), & \text{gdy } d \geq 3 \end{cases}.$$

Oszacowanie z dołu liczby Milnora

Twierdzenie

Niech $d, t \in \mathbb{N}$, $dt > 1$ i $(D, \nu) \in Q_d^t$. Jeśli $(\tilde{D}, \tilde{\nu}) \notin [(D, \nu)]$ jest dowolnym diagramem Enriquesa takim, że $[(D, \nu)]$ jest liniowo przyległy do $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$, to

$$\mu((\tilde{D}, \tilde{\nu})) \leq \begin{cases} \mu((D, \nu)) - 1, & \text{gdy } d = 1 \\ \mu((D, \nu)) - 1, & \text{gdy } d = 2, w_D = 0 \\ \mu((D, \nu)) - w_D, & \text{gdy } d = 2, w_D \neq 0 \\ \mu((D, \nu)) - (d - 2 + w_D), & \text{gdy } d \geq 3 \end{cases}.$$

Wzór na skok liczby Milnora

Twierdzenie

Dla dowolnej osobliwości quasijednorodnej f_0 skok liczby Milnora dla deformacji liniowych wynosi:

$$\lambda^{\text{lin}}(f_0) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } d = 1 \\ 1, & \text{gdy } d = 2, w_D = 0 \\ w_{D_{f_0}}, & \text{gdy } d = 2, w_D \neq 0 \\ d - 2 + w_{D_{f_0}}, & \text{gdy } d \geq 3 \end{cases},$$

gdzie

$$d = \begin{cases} k + l + p, & \text{gdy } p = q \\ k + p, & \text{gdy } p \neq q \text{ i } p|q \\ \text{NWD}(p, q), & \text{gdy } p \nmid q \end{cases},$$

a (D_{f_0}, ν_{f_0}) jest diagramem Enriquesa osobliwości f_0 .

Wzór na skok liczby Milnora

Wniosek

Niech f_0 będzie osobliwością quasijednorodną, wówczas

- ① Jeśli $p = q$ tzn. f_0 is jest osobliwością jednorodną:

$$\lambda^{\text{lin}}(f_0) = \begin{cases} 1, & \text{if } k + l + p = 2 \\ k + l + p - 2, & \text{if } k + l + p \geq 3 \end{cases} .$$

- ② Jeśli $p \neq q$ i $p|q$ to:

$$\lambda^{\text{lin}}(f_0) = \begin{cases} 1, & \text{if } p + k \leq 2 \\ p + k - 1, & \text{if } p + k \geq 3 \end{cases} .$$

- ③ Jeśli $p \neq q$ i $p \nmid q$ to:

$$\lambda^{\text{lin}}(f_0) = \text{NWD}(p, q).$$

Osobliwości semi-quasijednorodne

Osobliwością **semi-quasijednorodną** nazywamy osobliwość postaci: $f_0 = f'_0 + g$, gdzie f'_0 jest osobliwością quasijednorodną ze względu na (w_x, w_y) i $\text{ord}_{(w_x, w_y)} g > \text{ord}_{(w_x, w_y)} f'_0$.

Wniosek

Dla dowolnej osobliwości semi-quasijednorodnej f_0

$$\lambda^{\text{lin}}(f_0) = \lambda^{\text{lin}}(f'_0)$$

Dziękuję za uwagę!

Bibliografia

-  M. Alberich-Carramiñana, J. Roé: *Enriques Diagrams and Adjacency of Planar Curve Singularities*, *Canad. J. Math.* Vol 57(1), 2005.
-  S. Brzostowski, T. Krasieński, J. Walewska: *Milnor numbers in deformations of homogeneous singularities* ArXiv,(1104.7704), 2014.
-  A. Bodin: *Jump of Milnor number*, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*,38(3):389-396,2007.
-  E. Casas-Alvero: *Singularities of Plane Curve*, Cambridge University Press, 2000.
-  G.-M. Gruel, C. Lossen, E. Shustin: *Introduction to Singularities and Deformation*, Springer Verlag, 2006.

