Pierścienie stałych różniczkowań faktoryzowalnych cyklicznych

Janusz Zieliński

Uniwersytet Mikołaja Kopernika

XXXVII Konferencja i Warsztaty ”Geometria Analityczna i Algebraiczna”, Łódź, 12 stycznia 2016

Oznaczenia

k - ciało charakterystyki zero
$\mathbb{N}$ - zbiór nieujemnych liczb całkowitych
$\mathbb{N}_+$ - zbiór dodatnich liczb całkowitych
$\mathbb{Q}_+$ - zbiór dodatnich liczb wymiernych
n - ustalona liczba naturalna $\geqslant 3$
$k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]$

Motywacja

- zastosowania w biologii populacyjnej, fizyce laserowej i fizyce plazmy
- procedura Lagutinskiego stowarzyszania różniczkowania faktoryzowalnego z dowolnym różniczkowaniem
- powiązanie z teorią niezmienników (dla dowolnej spójnej grupy algebraicznej $G \subseteq \mathrm{Gl}_n(k)$ istnieje różniczkowanie d takie, że $k[X]^G = k[X]^d$)

Różniczkowania

Jeżeli R jest k-algebrą przemienną, to k-liniowe odwzorowanie $d : R \to R$ nazywamy *różniczkowaniem* algebry R, jeśli dla wszystkich $a, b \in R$

$$d(ab) = ad(b) + d(a)b.$$

Zbiór $R^d = \ker d$ nazywamy *pierścieniem stałych* różniczkowania d.

Wówczas $k \subseteq R^d$ i *nietrywialną* stałą różniczkowania d nazywamy element zbioru $R^d \setminus k$.

Jeśli $f_1, \ldots, f_n \in k[X]$, to istnieje dokładnie jedno różniczkowanie $d : k[X] \to k[X]$ takie, że $d(x_1) = f_1, \ldots, d(x_n) = f_n$.

Przykłady

- Przykład 1. Czternasty problem Hilberta.

Niech L będzie ciałem takim, że $k \subseteq L \subseteq k(X)$.

Problem (1900, Hilbert): Czy pierścień $L \cap k[X]$ jest skończenie generowany nad k?

1958, Nagata: nie.
1993, Derksen: ten kontrprzykład jest postaci $k[X]^d$ dla $n = 32$.
1994, Roberts, Deveney, Finston: kontrprzykład dla $n = 7$.
1998, Freudenburg: dla $n = 6$.
1999, Daigle, Freudenburg: dla $n = 5$.
2005, Kuroda: dla $n = 4$.
1988, Nagata, Nowicki: $k[X]^d$ jest skończenie generowane nad k dla $n \leqslant 3$.

Przykłady

- Przykład 2. Różniczkowania Jouanolou.

Niech $s, n \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $n \geqslant 3$

$$d : \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$$

$$d(x_i) = x_{i+1}^s$$

1979, Jouanolou: jeśli $n = 3$, to $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^d = \mathbb{C}$.
2000, Maciejewski, Moulin Ollagnier, Nowicki, Strelcyn: jeśli n jest liczbą pierwszą $\geqslant 3$, to $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^d = \mathbb{C}$.
2003, Żołądek: jeśli $n \geqslant 3$, to $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^d = \mathbb{C}$.

Sformułowanie problemu

Różniczkowanie $d : k[X] \to k[X]$ nazywamy *faktoryzowalnym*, jeśli $d(x_i) = x_i f_i$, gdzie wielomiany f_i są stopnia 1 dla $i = 1, \dots, n$.

Różniczkowanie $d : k[X] \to k[X]$ nazywamy *faktoryzowalnym cyklicznym*, jeśli $d(x_i) = x_i(A_i x_{i-1} + B_i x_{i+1})$, gdzie $A_i, B_i \in k$ dla $i = 1, \dots, n$ (przyjmujemy konwencję, że $x_{n+1} = x_1$ oraz $x_0 = x_n$).

Cel: wyznaczyć $k[X]^d$.

Sformułowanie problemu

Różniczkowanie $d : k[X] \to k[X]$ nazywamy różniczkowaniem *Lotki-Volterry* z parametrami $C_1, \ldots, C_n \in k$, jeśli

$$d(x_i) = x_i(x_{i-1} - C_i x_{i+1})$$

dla $i = 1, \ldots, n$ (w cyklicznym sensie).

Rozwiązania

- J. Moulin Ollagnier, A. Nowicki (1999): dla $n = 3$ i dowolnych parametrów C_i
- P. Hegedűs (2012): dla dowolnego n, ale wszystkich C_i równych 1
- J. Z. (2013): dla $n = 4$ i parametrów C_i
- P. Hegedűs, J. Z. (2015): dla dowolnego n i dowolnych parametrów C_i

Dalsze oznaczenia

Oznaczmy przez $k[X]_{(m)}$ składową jednorodną $k[X]$ stopnia m.

Niech $k[X]^d_{(m)} = k[X]_{(m)} \cap k[X]^d$.

Ponieważ d jest różniczkowaniem jednorodnym, zachodzi
$k[X]^d = \bigoplus_{m=0}^{\infty} k[X]^d_{(m)}$

Główne twierdzenia

Jeśli $C_i = 1$ dla wszystkich i, to d nazywamy *różniczkowaniem Volterry*.

Twierdzenie (Hegedűs)

Pierścień stałych różniczkowania Volterry n zmiennych jest skończenie generowany nad k o $[(n+2)/2]$ generatorach. W każdym przypadku jest pierścieniem wielomianów.

Twierdzenie (Hegedűs oraz Z.)

Pierścień stałych różniczkowania Lotki-Volterry $n \geqslant 4$ zmiennych jest skończenie generowany nad k o co najwyżej 3 generatorach, jeśli istnieje i takie, że $C_i \neq 1$. W każdym przypadku jest pierścieniem wielomianów.

Generatory

Niech $f = \sum_{i=1}^{n}(\prod_{j=1}^{i-1} C_j)x_i = x_1 + C_1x_2 + C_1C_2x_3 + \ldots + C_1C_2 \cdots C_{n-1}x_n$.

Rozważmy niepuste podzbiory $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}_n$ liczb całkowitych mod n zamknięte na $i \mapsto i+2$. Jeśli n jest nieparzyste, to $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_n$, jeśli n jest parzyste, to mamy ponadto podzbiory $\mathcal{E} = \{2i \mid i \leqslant n/2\}$ oraz $\mathcal{O} = \{2i-1 \mid i \leqslant n/2\}$. Dla danego $\mathcal{A}$ definiujemy wielomian $g_{\mathcal{A}}$, jeśli $C_i \in \mathbb{Q}_+$ dla wszystkich $i \in \mathcal{A}$ oraz $\prod_{i \in \mathcal{A}} C_i = 1$. W tym przypadku istnieją wyznaczone jednoznacznie względnie pierwsze $\theta_i \in \mathbb{N}_+$ dla $i \in \mathcal{A}$ takie, że $\theta_{i+2} = C_i\theta_i$. Niech wówczas $g_{\mathcal{A}} = \prod_{i \in \mathcal{A}} x_i^{\theta_i}$.

Generatory

Twierdzenie (Hegedűs oraz Z.)

Niech $n > 4$ *oraz niech istnieje* i *takie, że* $C_i \neq 1$. *Wówczas liczba generatorów pierścienia stałych różniczkowania Lotki-Volterry jest równa:*

- 0, *jeśli* $\prod C_i \neq 1$ *oraz żadne z* $g_{\mathcal{A}}$ *nie jest zdefiniowane;*
- 3, *jeśli* n *jest parzyste oraz* $g_{\mathcal{E}}$ *i* $g_{\mathcal{O}}$ *są zdefiniowane;*
- 2, *jeśli* n *jest nieparzyste oraz* $g_{\mathbb{Z}_n}$ *jest zdefiniowane, albo* n *jest parzyste oraz* $\prod C_i = 1$, *ale tylko jedno z* $g_{\mathcal{E}}$ *i* $g_{\mathcal{O}}$ *jest zdefiniowane;*
- 1 *w pozostałych przypadkach.*

Generatorami są w każdym przypadku te wielomiany $g_{\mathcal{A}}$, *które są zdefiniowane wraz z* f, *o ile* $\prod C_i = 1$.

Przykładowe lematy

Niech $C_n \neq 1$. Rozważmy standardowy porządek leksykograficzny. Przypuśćmy, że h jest kontrprzykładem do twierdzenia o najmniejszym jednomianie wiodącym. Niech $m_1 = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ będzie tym jednomianem wiodącym. Niech $M(h)$ oznacza zbiór jednomianów pojawiających się w h z niezerowym współczynnikiem.

Lemat (Hegedűs oraz Z.)

Przypuśćmy, że $m = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}$ jest jednomianem oraz r jest dodatnią liczbą całkowitą o następujących własnościach:

1. $\gamma_n = \alpha_n$;
2. $\gamma_{2i-1} = \alpha_{2i-1}$ *dla* $1 \leqslant i \leqslant r$;
3. $\gamma_{2i} = C_{2i-2}\gamma_{2i-2}$ *dla* $1 \leqslant i \leqslant r-1$;
4. $\gamma_{2r} \neq C_{2r-2}\gamma_{2r-2}$.

Wówczas $m \notin M(h)$.

Przykładowe lemata

Lemat (Hegedűs oraz Z.)

Przypuśćmy, że $m = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma_i}$ *jest jednomianem oraz* $r < n/2$ *jest dodatnią liczbą całkowitą o następujących własnościach:*

1. $\gamma_n = \alpha_n$ *(lub* $C_n = 0$*);*
2. $\gamma_{2i-1} = \alpha_{2i-1}$ *dla* $1 \leqslant i \leqslant r$*;*
3. $\gamma_{2i} = \alpha_{2i}$ *dla* $1 \leqslant i \leqslant r$*.*

Wtedy istnieje nieujemna liczba całkowita β_{2r-1} *taka, że* $C_{2r-1}(\gamma_{2r-1} - \beta_{2r-1}) = \gamma_{2r+1}$ *oraz* $m' = m(x_{2r}/x_{2r-1})^{\beta_{2r-1}} \in M(h)$*. W szczególności istnieją nieujemne liczby całkowite* β'_{2i-1} *takie, że* $C_{2i-1}(\alpha_{2i-1} - \beta'_{2i-1}) = \alpha_{2i+1}$ *dla* $1 \leqslant i < n/2$*.*

Przykładowe lematy

Lemat (Hegedűs oraz Z.)

Przypuśćmy, że $C_n \neq 0$ *oraz* $m = \prod x_i^{\gamma_i} \in M(h)$ *jest takie, że* $\gamma_n = \alpha_n$, $\gamma_1 = \alpha_1$ *oraz* $\gamma_2 = \alpha_2 = C_n\alpha_n$. *Wtedy* $l = \gamma_1 - C_{n-1}\gamma_{n-1}$ *jest nieujemną liczbą całkowitą oraz* $m' = m(x_n/x_1)^l \in M(h)$. *W szczególności* $\alpha_1 - C_{n-1}\alpha_{n-1}$ *jest nieujemną liczbą całkowitą.*

Lemat (Hegedűs oraz Z.)

Niech $h, g \in k[X]^d$, *gdzie* g *jest jednomianem. Jeśli jednomian wiodący wielomianu* h *jest równy* $m_1 = x_1^k g$ *dla* $k > 0$, *to* $C_1 C_2 \cdots C_n$ *jest* k*-tym pierwiastkiem z jedynki, w szczególności wszystkie* $C_i \neq 0$. *Jeśli ponadto* $n > 4$, *to* $C_1 C_2 \cdots C_n = 1$.

generatory dla różniczkowania Volterry

Niech $n \geqslant 3$.

Dla $1 \leqslant k < n/2$ definiujemy

$$f_k = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_k \\ |i_s - i_t| > 1}} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}$$

(w cyklicznym sensie, czyli nie dopuszczamy jednoczesności $i_1 = 1$ oraz $i_k = n$).

Jeśli n jest nieparzyste, to niech $g = x_1 x_2 \cdots x_n$. Jeśli n jest parzyste, to niech $f_{n/2} = x_1 x_3 \cdots x_{n-1}$ oraz $g = x_2 x_4 \cdots x_n$.

Jeśli d jest różniczkowaniem Volterry n zmiennych, to $k[X]^d$ jest generowane przez zbiór $\{f_1, f_2, \ldots, f_{[n/2]}, g\}$.