Homotopijne własności pewnych rzeczywistych odwzorowań algebraicznych

Maciej Zieliński

Uniwersytet Jagielloński

Łódź, 9-13.01.2017

Wstępne uwagi

- Rzeczywista rozmaitość algebraiczna $=$ algebraiczny podzbiór $\mathbb{R}^n$

Wstępne uwagi

- Rzeczywista rozmaitość algebraiczna $=$ algebraiczny podzbiór $\mathbb{R}^n$
- $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ $=$ Grassmannian p-wymiarowych podprzestrzeni ($\mathbb{F}$-)wektorowych $\mathbb{F}^n$

Wstępne uwagi

- Rzeczywista rozmaitość algebraiczna $=$ algebraiczny podzbiór $\mathbb{R}^n$
- $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) =$ Grassmannian p-wymiarowych podprzestrzeni ($\mathbb{F}$-)wektorowych $\mathbb{F}^n$ - rzeczywista rozmaitość algebraiczna.

Wstępne uwagi

- Rzeczywista rozmaitość algebraiczna $=$ algebraiczny podzbiór $\mathbb{R}^n$
- $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) =$ Grassmannian p-wymiarowych podprzestrzeni ($\mathbb{F}$-)wektorowych $\mathbb{F}^n$ - rzeczywista rozmaitość algebraiczna.
- $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$

Wstępne uwagi

- Rzeczywista rozmaitość algebraiczna $=$ algebraiczny podzbiór $\mathbb{R}^n$
- $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) =$ Grassmannian p-wymiarowych podprzestrzeni ($\mathbb{F}$-)wektorowych $\mathbb{F}^n$ - rzeczywista rozmaitość algebraiczna.
- $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$ (przy tym ostatnim trzeba uważać)

Wstępne uwagi

- Rzeczywista rozmaitość algebraiczna = algebraiczny podzbiór $\mathbb{R}^n$
- $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ = Grassmannian p-wymiarowych podprzestrzeni ($\mathbb{F}$-)wektorowych $\mathbb{F}^n$ - rzeczywista rozmaitość algebraiczna.
- $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ lub $\mathbb{H}$ (przy tym ostatnim trzeba uważać)
- $\mathcal{R}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ - przestrzeń odwzorowań regularnych (topologia zwarto-otwarta).

Twierdzenie (Bochnak-Kucharz)

Niech X będzie zwartą rzeczywistą rozmaitością algebraiczną i niech $i\colon \mathcal{R}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ będzie odwzorowaniem inkluzji. Wtedy dla każdego $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ indukowane odwzorowanie $i_*\colon \pi_k(\mathcal{R}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f) \to \pi_k(\mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f)$ jest injektywne dla $k = 0$ i jest izomorfizmem grup dla $k \geqslant 1$.

Pewne twierdzenie

Twierdzenie (Bochnak-Kucharz)

Niech X będzie zwartą rzeczywistą rozmaitością algebraiczną i niech $i\colon \mathcal{R}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ będzie odwzorowaniem inkluzji. Wtedy dla każdego $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ indukowane odwzorowanie $i_*\colon \pi_k(\mathcal{R}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f) \to \pi_k(\mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f)$ jest injektywne dla $k = 0$ i jest izomorfizmem grup dla $k \geqslant 1$.

Prawie mamy słabą równoważność homotopijną. Brakuje „tylko” surjektywności dla $k = 0$

Pewne twierdzenie

Twierdzenie (Bochnak-Kucharz)

Niech X będzie zwartą rzeczywistą rozmaitością algebraiczną i niech $i\colon \mathcal{R}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ będzie odwzorowaniem inkluzji. Wtedy dla każdego $f \in \mathcal{R}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ indukowane odwzorowanie $i_*\colon \pi_k(\mathcal{R}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f) \to \pi_k(\mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f)$ jest injektywne dla $k = 0$ i jest izomorfizmem grup dla $k \geqslant 1$.

Prawie mamy słabą równoważność homotopijną. Brakuje „tylko” surjektywności dla $k = 0 \iff$ każde odwzorowanie ciągłe jest homotopijne z regularnym.

Definicja

Stratyfikacją X nazywamy rozbicie X na skończoną liczbę) Zariski lokalnie domkniętych podrozmaitości.

Definicja

Stratyfikacją X nazywamy rozbicie X na skończoną liczbę) Zariski lokalnie domkniętych podrozmaitości.
Odwzorowanie $f\colon X \to Y$ nazywamy $\mathcal{S}$-regularnym jeśli f jest ciągłe (w zwykłej topologii) i istnieje taka stratyfikacja $\mathcal{S}$ X, że $f|_S$ jest regularne dla każdego $S \in \mathcal{S}$.

Stratyfikacje

Definicja

Stratyfikacją X nazywamy rozbicie X na skończoną liczbę) Zariski lokalnie domkniętych podrozmaitości.
Odwzorowanie $f : X \to Y$ nazywamy $\mathcal{S}$-regularnym jeśli f jest ciągłe (w zwykłej topologii) i istnieje taka stratyfikacja $\mathcal{S}$ X, że $f|_S$ jest regularne dla każdego $S \in \mathcal{S}$.
Jeśli nie chcemy precyzować $\mathcal{S}$ to powiemy, że f jest stratyfikowane-regularne.

Definicja

Stratyfikacją X nazywamy rozbicie X na skończoną liczbę) Zariski lokalnie domkniętych podrozmaitości.
Odwzorowanie $f\colon X \to Y$ nazywamy $\mathcal{S}$-regularnym jeśli f jest ciągłe (w zwykłej topologii) i istnieje taka stratyfikacja $\mathcal{S}$ X, że $f|_S$ jest regularne dla każdego $S \in \mathcal{S}$.
Jeśli nie chcemy precyzować $\mathcal{S}$ to powiemy, że f jest stratyfikowane-regularne.
Zbiór wszystkich takich odwzorowań między X i Y oznaczamy $\mathcal{R}^0(X, Y)$.

Trochę inne twierdzenie

Twierdzenie

Niech X będzie zwartą rzeczywistą rozmaitością algebraiczną i niech $i\colon \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ będzie odwzorowaniem inkluzji. Wtedy dla każdego $f \in \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ indukowane odwzorowanie $i_*\colon \pi_k(\mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f) \to \pi_k(\mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f)$ jest injektywne dla $k = 0$ i jest izomorfizmem grup dla $k \geqslant 1$.

Trochę inne twierdzenie

Twierdzenie

Niech X będzie zwartą rzeczywistą rozmaitością algebraiczną i niech $i\colon \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ będzie odwzorowaniem inkluzji. Wtedy dla każdego $f \in \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ indukowane odwzorowanie $i_*\colon \pi_k(\mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f) \to \pi_k(\mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f)$ jest injektywne dla $k = 0$ i jest izomorfizmem grup dla $k \geqslant 1$.

Uwaga

Oczywiście surjektywność dostajemy z poprzedniego twierdzenia - mamy $\mathcal{R}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$.

Dowód - początek

Czego tak właściwie potrzebujemy? Dla rozgrzewki surjektywność:

Dowód - początek

Czego tak właściwie potrzebujemy? Dla rozgrzewki surjektywność:

- Musimy pokazać, że jeżeli $\phi\colon \mathbb{S}^k \to \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ jest ciągłe to mamy zachowującą punkt bazowy homotopię z pewnym $\tilde{\phi}\colon \mathbb{S}^k \to \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$.

Dowód - początek

Czego tak właściwie potrzebujemy? Dla rozgrzewki surjektywność:

- Musimy pokazać, że jeżeli $\phi\colon \mathbb{S}^k \to \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ jest ciągłe to mamy zachowującą punkt bazowy homotopię z pewnym $\tilde{\phi}\colon \mathbb{S}^k \to \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$.
- Oczywiście możemy myśleć o ϕ jako o odwzorowaniu $X \times \mathbb{S}^k \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ - chcemy tak naprawdę aproksymować takie odwzorowania.

Dowód - początek

Czego tak właściwie potrzebujemy? Dla rozgrzewki surjektywność:

- Musimy pokazać, że jeżeli $\phi\colon \mathbb{S}^k \to \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ jest ciągłe to mamy zachowującą punkt bazowy homotopię z pewnym $\tilde{\phi}\colon \mathbb{S}^k \to \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$.
- Oczywiście możemy myśleć o ϕ jako o odwzorowaniu $X \times \mathbb{S}^k \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ - chcemy tak naprawdę aproksymować takie odwzorowania.
- $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ ma otoczenie tubularne w pewnym $\mathbb{R}^N$ - wystarczy więc, że znajdziemy $\tilde{\phi}$ odpowiednio blisko ϕ i zretraktujemy: $H(x,t) = r((1-t)\phi(x) + t\tilde{\phi}(x))$.

Co potrafimy aproksymować?

Lemat

Niech $Y \subset X$ będzie Zariski domkniętą podrozmaitością i K zwartym podzbiorem X zawierającym Y. Dla każdej ciągłej funkcji $f\colon K \to \mathbb{R}$, takiej, że zacieśnienie $f|_Y$ jest regularne i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja regularna $F\colon X \to \mathbb{R}$ taka, że $\|F - f\|_K < \varepsilon$ i $F|_Y = f|_Y$.

Co potrafimy aproksymować?

Lemat

Niech $Y \subset X$ będzie Zariski domkniętą podrozmaitością i K zwartym podzbiorem X zawierającym Y. Dla każdej ciągłej funkcji $f : K \to \mathbb{R}$, takiej, że zacieśnienie $f|_Y$ jest regularne i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja regularna $F : X \to \mathbb{R}$ taka, że $\|F - f\|_K < \varepsilon$ i $F|_Y = f|_Y$.

Dowód.

- Redukujemy do przypadku gdzie $f|_K = 0$ i $Y = X \cap H$, $H = \{x_0 = 0\}$ - hiperpłaszczyzna

Co potrafimy aproksymować?

Lemat

Niech $Y \subset X$ będzie Zariski domkniętą podrozmaitością i K zwartym podzbiorem X zawierającym Y. Dla każdej ciągłej funkcji $f : K \to \mathbb{R}$, takiej, że zacieśnienie $f|_Y$ jest regularne i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja regularna $F : X \to \mathbb{R}$ taka, że $\|F - f\|_K < \varepsilon$ i $F|_Y = f|_Y$.

Dowód.

- Redukujemy do przypadku gdzie $f|_K = 0$ i $Y = X \cap H$, $H = \{x_0 = 0\}$ - hiperpłaszczyzna
- f przedłuża się przez 0 do $K \cup H$, a z tw. Tietzego do $\mathbb{R}^n$.

Co potrafimy aproksymować?

Lemat

Niech $Y \subset X$ *będzie Zariski domkniętą podrozmaitością i* K *zwartym podzbiorem* X *zawierającym* Y*. Dla każdej ciągłej funkcji* $f : K \to \mathbb{R}$*, takiej, że zacieśnienie* $f|_Y$ *jest regularne i dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje funkcja regularna* $F : X \to \mathbb{R}$ *taka, że* $\|F - f\|_K < \varepsilon$ *i* $F|_Y = f|_Y$*.*

Dowód.

- Redukujemy do przypadku gdzie $f|_K = 0$ i $Y = X \cap H$, $H = \{x_0 = 0\}$ - hiperpłaszczyzna
- f przedłuża się przez 0 do $K \cup H$, a z tw. Tietzego do $\mathbb{R}^n$.
- Przybliżamy gładką funkcją g znikającą na H.

Co potrafimy aproksymować?

Lemat

Niech $Y \subset X$ będzie Zariski domkniętą podrozmaitością i K zwartym podzbiorem X zawierającym Y. Dla każdej ciągłej funkcji $f : K \to \mathbb{R}$, takiej, że zacieśnienie $f|_Y$ jest regularne i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja regularna $F : X \to \mathbb{R}$ taka, że $\|F - f\|_K < \varepsilon$ i $F|_Y = f|_Y$.

Dowód.

- Redukujemy do przypadku gdzie $f|_K = 0$ i $Y = X \cap H$, $H = \{x_0 = 0\}$ - hiperpłaszczyzna
- f przedłuża się przez 0 do $K \cup H$, a z tw. Tietzego do $\mathbb{R}^n$.
- Przybliżamy gładką funkcją g znikającą na H.
- Możemy zapisać $g(x) = x_0 p(\hat{x})$ i zastosować twierdzenie Weierstrassa do p.

□

Aproksymacja II

Lemat

Niech $Y \subset X$ będzie Zariski domkniętą podrozmaitością i K zwartym podzbiorem X zawierającym Y. Dla każdej ciągłej funkcji $f\colon K \to \mathbb{R}$, takiej, że zacieśnienie $f|_Y$ jest s-regularne i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja s-regularna $F\colon X \to \mathbb{R}$ taka, że $\|F - f\|_K < \varepsilon$ i $F|_Y = f|_Y$.

Aproksymacja II

Lemat

Niech $Y \subset X$ będzie Zariski domkniętą podrozmaitością i K zwartym podzbiorem X zawierającym Y. Dla każdej ciągłej funkcji $f\colon K \to \mathbb{R}$, takiej, że zacieśnienie $f|_Y$ jest s-regularne i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja s-regularna $F\colon X \to \mathbb{R}$ taka, że $\|F - f\|_K < \varepsilon$ i $F|_Y = f|_Y$.

Fakt (Kollár-Nowak)

Niech $B \subset A \subset X$ będą Zariski domkniętymi podrozmaitościami. Jeśli $f\colon A \to \mathbb{R}$ jest s-regularna i regularna na $A \setminus B$ to istnieje s-regularne przedłużenie $F\colon X \to \mathbb{R}$ z $F|_A = f$, które jest regularne na $X \setminus B$.

Lemat 1

Lemat

Niech X będzie zwartą rzeczywistą rozmaitością algebraiczną ze stratyfikacją $\mathcal{S}$, a $F\colon X \times \mathbb{S}^k \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ odwzorowaniem ciągłym. Przypuśćmy, że istnieje takie $y_0 \in \mathbb{S}^k$, że odwzorowanie $F_{y_0} = F|_{X\times\{y_0\}}$ jest $(\mathcal{S} \times \{y_0\})$-regularne. Wtedy w dowolnym otoczeniu F w $\mathcal{C}(X \times \mathbb{S}^k, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ istnieje odwzorowanie G takie, że $G_{y_0} = F_{y_0}$ i G_y jest $(\mathcal{S} \times \{y\})$-regularne dla każdego y w $\mathbb{S}^k$.

Dowód.

Dzielimy $\mathbb{S}^k$ na dwie domknięte półsfery przecinające się równikiem, a następnie aproksymujemy na każdej z osobna w taki sposób, aby odwzorowania zgodziły się na równiku. □

Wiązki wektorowe

- $\varepsilon^n = X \times \mathbb{F}^n$ - trywialna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa na X

Wiązki wektorowe

- $\varepsilon^n = X \times \mathbb{F}^n$ - trywialna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa na X
- $\gamma = \gamma_{p,n} = \{(x, v) \in \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) \times \mathbb{F}^n : v \in x\}$ - tautologiczna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa na $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$

Wiązki wektorowe

- $\varepsilon^n = X \times \mathbb{F}^n$ - trywialna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa na X
- $\gamma = \gamma_{p,n} = \{(x, v) \in \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) \times \mathbb{F}^n : v \in x\}$ - tautologiczna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa na $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$
- Jeśli $f : X \to Y$ ciągłe to $f^*(\gamma) = \{(x, (y, v)) \in X \times \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) : y = f(x)\}$ - topologiczna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa

Wiązki wektorowe

- $\varepsilon^n = X \times \mathbb{F}^n$ - trywialna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa na X
- $\gamma = \gamma_{p,n} = \{(x, v) \in \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) \times \mathbb{F}^n : v \in x\}$ - tautologiczna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa na $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$
- Jeśli $f : X \to Y$ ciągłe to $f^*(\gamma) = \{(x, (y, v)) \in X \times \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) : y = f(x)\}$ - topologiczna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa
- Jeśli $\xi \subset \varepsilon^n$ - wiązka rangi p na zwartej przestrzeni X to mamy odwzorowanie klasyfikujące $X \ni x \mapsto \xi_x \in \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$

Wiązki wektorowe

- $\varepsilon^n = X \times \mathbb{F}^n$ - trywialna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa na X
- $\gamma = \gamma_{p,n} = \{(x, v) \in \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) \times \mathbb{F}^n : v \in x\}$ - tautologiczna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa na $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$
- Jeśli $f \colon X \to Y$ ciągłe to $f^*(\gamma) = \{(x, (y, v)) \in X \times \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) : y = f(x)\}$ - topologiczna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa
- Jeśli $\xi \subset \varepsilon^n$ - wiązka rangi p na zwartej przestrzeni X to mamy odwzorowanie klasyfikujące $X \ni x \mapsto \xi_x \in \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$
- $\{$klasy homotopii odwzorowań z X w $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)\} \leftrightarrow \{$podwiązki ε^n rangi $p\}$

Wiązki wektorowe

- $\varepsilon^n = X \times \mathbb{F}^n$ - trywialna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa na X
- $\gamma = \gamma_{p,n} = \{(x, v) \in \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) \times \mathbb{F}^n : v \in x\}$ - tautologiczna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa na $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$
- Jeśli $f\colon X \to Y$ ciągłe to $f^*(\gamma) = \{(x,(y,v)) \in X \times \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n) : y = f(x)\}$ - topologiczna $\mathbb{F}$-wiązka wektorowa
- Jeśli $\xi \subset \varepsilon^n$ - wiązka rangi p na zwartej przestrzeni X to mamy odwzorowanie klasyfikujące $X \ni x \mapsto \xi_x \in \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$
- {klasy homotopii odwzorowań z X w $\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$} $\leftrightarrow$ {podwiązki ε^n rangi p}
- Jeśli X jest rzeczywistą rozmaitością algebraiczną, a odwzorowanie klasyfikujące jest regularne to wiązka jest algebraiczna.

Wiązki stratyfikowane

Definicja

Subwiązkę $\xi \subset \varepsilon^n$ nad rzeczywistą rozmaitością algebraiczną X nazwiemy $\mathcal{S}$-algebraiczną, jeśli dla pewnej stratyfikacji $\mathcal{S}$ $\xi|_S$ jest algebraiczna dla każdego $S \in \mathcal{S}$.

Wiązki stratyfikowane

Definicja

Subwiązkę $\xi \subset \varepsilon^n$ nad rzeczywistą rozmaitością algebraiczną X nazwiemy $\mathcal{S}$-algebraiczną, jeśli dla pewnej stratyfikacji $\mathcal{S}$ $\xi|_S$ jest algebraiczna dla każdego $S \in \mathcal{S}$.

- Podobnie dla sekcji i morfizmów wiązek.

Wiązki stratyfikowane

Definicja

Subwiązkę $\xi \subset \varepsilon^n$ nad rzeczywistą rozmaitością algebraiczną X nazwiemy $\mathcal{S}$-algebraiczną, jeśli dla pewnej stratyfikacji $\mathcal{S}$ $\xi|_S$ jest algebraiczna dla każdego $S \in \mathcal{S}$.

- Podobnie dla sekcji i morfizmów wiązek.
- Lemat o aproksymacji przenosi się na sekcje takich wiązek.

Wiązki stratyfikowane

Definicja

Subwiązkę $\xi \subset \varepsilon^n$ nad rzeczywistą rozmaitością algebraiczną X nazwiemy $\mathcal{S}$-algebraiczną, jeśli dla pewnej stratyfikacji $\mathcal{S}$ $\xi|_S$ jest algebraiczna dla każdego $S \in \mathcal{S}$.

- Podobnie dla sekcji i morfizmów wiązek.
- Lemat o aproksymacji przenosi się na sekcje takich wiązek.
- Mamy też charakteryzację przez odwzorowania klasyfikujące.

Lemat 2

Lemat

Niech X *i* Y *będą rzeczywistymi rozmaitościami algebraicznymi, a* $Y_0 \subset Y$ *Zariski domkniętą podrozmaitością zawartą w ściągalnym, zwartym zbiorze* K*. Załóżmy dodatkowo, że* X *jest zwarta. Niech* $F\colon X \times K \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ *będzie ciągłym odwzorowaniem, którego zacieśnienie* $F_{Y_0} = F|_{X\times Y_0}$ *jest* $\mathcal{S} \times Y_0$*-regularne. Wtedy w każdym otoczeniu* F *w* $\mathcal{C}(X \times K, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ *istnieje odwzorowanie* G*, takie że* $G_{Y_0} = F_{Y_0}$*, i* G_y *jest* $(\mathcal{S} \times \{y\})$*-regularne dla każdego* $y \in K$*.*

Dowód.

- K jest ściągalny, więc wszystkie wiązki są na nim topologicznie izomorficzne.

Lemat 2

Lemat

Niech X i Y będą rzeczywistymi rozmaitościami algebraicznymi, a $Y_0 \subset Y$ Zariski domkniętą podrozmaitością zawartą w ściągalnym, zwartym zbiorze K. Załóżmy dodatkowo, że X jest zwarta. Niech $F\colon X \times K \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ będzie ciągłym odwzorowaniem, którego zacieśnienie $F_{Y_0} = F|_{X \times Y_0}$ jest $\mathcal{S} \times Y_0$-regularne. Wtedy w każdym otoczeniu F w $\mathcal{C}(X \times K, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ istnieje odwzorowanie G, takie że $G_{Y_0} = F_{Y_0}$, i G_y jest $(\mathcal{S} \times \{y\})$-regularne dla każdego $y \in K$.

Dowód.

- K jest ściągalny, więc wszystkie wiązki są na nim topologicznie izomorficzne.
- W szczególności możemy rozważyć izomorfizm $(f^*\gamma)|_K$ z $(F^*\gamma)|_K$, gdzie $f(x, y) = F(x, y_0)$.

Lemat 2

Lemat

Niech X i Y będą rzeczywistymi rozmaitościami algebraicznymi, a $Y_0 \subset Y$ Zariski domkniętą podrozmaitością zawartą w ściągalnym, zwartym zbiorze K. Załóżmy dodatkowo, że X jest zwarta. Niech $F\colon X \times K \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ będzie ciągłym odwzorowaniem, którego zacieśnienie $F_{Y_0} = F|_{X \times Y_0}$ jest $\mathcal{S} \times Y_0$-regularne. Wtedy w każdym otoczeniu F w $\mathcal{C}(X \times K, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ istnieje odwzorowanie G, takie że $G_{Y_0} = F_{Y_0}$, i G_y jest $(\mathcal{S} \times \{y\})$-regularne dla każdego $y \in K$.

Dowód.

- K jest ściągalny, więc wszystkie wiązki są na nim topologicznie izomorficzne.
- W szczególności możemy rozważyć izomorfizm $(f^*\gamma)|_K$ z $(F^*\gamma)|_K$, gdzie $f(x, y) = F(x, y_0)$. Taki izomorfizm daje sekcję $\mathrm{Hom}(F^*\gamma, f^*\gamma)|_{X\times K}$, której zacieśnienie jest $(\mathcal{S} \times Y_0)$-regularne na Y_0.

Lemat 2

Lemat

Niech X i Y będą rzeczywistymi rozmaitościami algebraicznymi, a $Y_0 \subset Y$ Zariski domkniętą podrozmaitością zawartą w ściągalnym, zwartym zbiorze K. Załóżmy dodatkowo, że X jest zwarta. Niech $F\colon X \times K \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ będzie ciągłym odwzorowaniem, którego zacieśnienie $F_{Y_0} = F|_{X \times Y_0}$ jest $\mathcal{S} \times Y_0$-regularne. Wtedy w każdym otoczeniu F w $\mathcal{C}(X \times K, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ istnieje odwzorowanie G, takie że $G_{Y_0} = F_{Y_0}$, i G_y jest $(\mathcal{S} \times \{y\})$-regularne dla każdego $y \in K$.

Dowód.

- K jest ściągalny, więc wszystkie wiązki są na nim topologicznie izomorficzne.
- W szczególności możemy rozważyć izomorfizm $(f^*\gamma)|_K$ z $(F^*\gamma)|_K$, gdzie $f(x, y) = F(x, y_0)$. Taki izomorfizm daje sekcję $\mathrm{Hom}(\mathrm{F}^*\gamma, \mathrm{f}^*\gamma)|_{\mathrm{X}\times\mathrm{K}}$, której zacieśnienie jest $(\mathcal{S} \times Y_0)$-regularne na Y_0.

Lemat

Niech X i Y będą rzeczywistymi rozmaitościami algebraicznymi, a $Y_0 \subset Y$ Zariski domkniętą podrozmaitością zawartą w ściągalnym, zwartym zbiorze K. Załóżmy dodatkowo, że X jest zwarta. Niech $F\colon X \times K \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ będzie ciągłym odwzorowaniem, którego zacieśnienie $F_{Y_0} = F|_{X \times Y_0}$ jest $\mathcal{S} \times Y_0$-regularne. Wtedy w każdym otoczeniu F w $\mathcal{C}(X \times K, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ istnieje odwzorowanie G, takie że $G_{Y_0} = F_{Y_0}$, i G_y jest $(\mathcal{S} \times \{y\})$-regularne dla każdego $y \in K$.

Dowód.

- Taki izomorfizm daje sekcję $\mathrm{Hom}(\mathrm{F}^*\gamma, \mathrm{f}^*\gamma)|_{\mathrm{X}\times\mathrm{K}}$, której zacieśnienie jest $(\mathcal{S} \times Y_0)$-regularne na Y_0.

Lemat 2

Lemat

Niech X i Y będą rzeczywistymi rozmaitościami algebraicznymi, a $Y_0 \subset Y$ Zariski domkniętą podrozmaitością zawartą w ściągalnym, zwartym zbiorze K. Załóżmy dodatkowo, że X jest zwarta. Niech $F\colon X \times K \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ będzie ciągłym odwzorowaniem, którego zacieśnienie $F_{Y_0} = F|_{X \times Y_0}$ jest $\mathcal{S} \times Y_0$-regularne. Wtedy w każdym otoczeniu F w $\mathcal{C}(X \times K, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ istnieje odwzorowanie G, takie że $G_{Y_0} = F_{Y_0}$, i G_y jest $(\mathcal{S} \times \{y\})$-regularne dla każdego $y \in K$.

Dowód.

- Taki izomorfizm daje sekcję $\mathrm{Hom}(\mathrm{F}^*\gamma, \mathrm{f}^*\gamma)|_{\mathrm{X}\times\mathrm{K}}$, której zacieśnienie jest $(\mathcal{S} \times Y_0)$-regularne na Y_0.
- Ostatecznie traktując $F^*\gamma$ jako subwiązkę ϵ^n i używając lematu możemy dostać „dobrą” sekcję $s \in \Gamma(\mathrm{Hom}(\mathrm{f}^*\gamma, \epsilon^{\mathrm{n}}))$ przy pomocy której definiujemy $G(x, y) = s(x, y)(f^*\gamma_{(x,y)})$.

$\square$

Injektywność

Twierdzenie

Niech $i\colon \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ *będzie odwzorowaniem inkluzji. Wtedy dla każdego* $f \in \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ *indukowane odwzorowanie* $i_*\colon \pi_k(\mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f) \to \pi_k(\mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f)$ *jest injektywne dla* $k \geqslant 0$.

Injektywność

Twierdzenie

Niech $i\colon \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ *będzie odwzorowaniem inkluzji. Wtedy dla każdego* $f \in \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ *indukowane odwzorowanie* $i_*\colon \pi_k(\mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f) \to \pi_k(\mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f)$ *jest injektywne dla* $k \geqslant 0$.

Dowód.

Niech $[\phi] \in \pi_k(\mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)))$ będzie, takie że $i_*([\phi]) = 0$. To oznacza, że $\phi\colon X \times \mathbb{S}^k \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ przedłuża się do odwzorowania ciągłego $\Phi\colon X \times \mathbb{D}^{k+1} \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$.

Injektywność

Twierdzenie

Niech $i\colon \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ *będzie odwzorowaniem inkluzji. Wtedy dla każdego* $f \in \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ *indukowane odwzorowanie* $i_*\colon \pi_k(\mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f) \to \pi_k(\mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f)$ *jest injektywne dla* $k \geqslant 0$*.*

Dowód.

Niech $[\phi] \in \pi_k(\mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)))$ będzie, takie że $i_*([\phi]) = 0$. To oznacza, że $\phi\colon X \times \mathbb{S}^k \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ przedłuża się do odwzorowania ciągłego $\Phi\colon X \times \mathbb{D}^{k+1} \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$. Lemat daje nam bliskie odwzorowanie $\tilde{\Phi}\colon X \times \mathbb{D}^{k+1} \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$, takie że $\tilde{\Phi}_y$ jest stratyfikowane-regularne dla każdego $y \in \mathbb{S}^k$.

Twierdzenie

Niech $i\colon \mathcal{R}^0(X,\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X,\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ *będzie odwzorowaniem inkluzji. Wtedy dla każdego* $f \in \mathcal{R}^0(X,\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ *indukowane odwzorowanie* $i_*\colon \pi_k(\mathcal{R}^0(X,\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)),f) \to \pi_k(\mathcal{C}(X,\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)),f)$ *jest injektywne dla* $k \geqslant 0$.

Dowód.

Niech $[\phi] \in \pi_k(\mathcal{R}^0(X,\mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)))$ będzie, takie że $i_*([\phi]) = 0$. To oznacza, że $\phi\colon X \times \mathbb{S}^k \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ przedłuża się do odwzorowania ciągłego $\Phi\colon X \times \mathbb{D}^{k+1} \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$. Lemat daje nam bliskie odwzorowanie $\tilde{\Phi}\colon X \times \mathbb{D}^{k+1} \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$, takie że $\tilde{\Phi}_y$ jest stratyfikowane-regularne dla każdego $y \in \mathbb{S}^k$. Wystarczy pokazać, że $\tilde{\Phi}|_{\mathbb{S}^k}$ jest homotopijne z ϕ

Injektywność

Twierdzenie

Niech $i\colon \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)) \hookrightarrow \mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ *będzie odwzorowaniem inkluzji. Wtedy dla każdego* $f \in \mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n))$ *indukowane odwzorowanie* $i_*\colon \pi_k(\mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f) \to \pi_k(\mathcal{C}(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)), f)$ *jest injektywne dla* $k \geqslant 0$.

Dowód.

Niech $[\phi] \in \pi_k(\mathcal{R}^0(X, \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)))$ będzie, takie że $i_*([\phi]) = 0$. To oznacza, że $\phi\colon X \times \mathbb{S}^k \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$ przedłuża się do odwzorowania ciągłego $\Phi\colon X \times \mathbb{D}^{k+1} \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$. Lemat daje nam bliskie odwzorowanie $\tilde{\Phi}\colon X \times \mathbb{D}^{k+1} \to \mathbb{G}_p(\mathbb{F}^n)$, takie że $\tilde{\Phi}_y$ jest stratyfikowane-regularne dla każdego $y \in \mathbb{S}^k$. Wystarczy pokazać, że $\tilde{\Phi}|_{\mathbb{S}^k}$ jest homotopijne z ϕ
przez odwzorowania stratyfikowane-regularne. □