Aproksymacja odwzorowań w sfery odwzorowaniami regulous

Maciej Zieliński

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

Łódź, 8-12.01.2017

Rozgrzewka

Twierdzenie (Twierdzenie Weierstrassa)

Niech $f \colon [a; b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy f można jednostajnie aproksymować wielomianami, tj. $\mathcal{P}([a; b]; \mathbb{R})$ jest gęsty w $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$.

Rozgrzewka

Twierdzenie (Twierdzenie Weierstrassa)

Niech $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą. Wtedy* f *można jednostajnie aproksymować wielomianami, tj.* $\mathcal{P}([a; b]; \mathbb{R})$ *jest gęsty w* $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$*.*

Twierdzenie (Stone-Weierstrass)

Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ *będzie zbiorem zwartym. Wtedy każde odwzorowanie ciągłe* $f : X \to \mathbb{R}^m$ *można jednostajnie aproksymować odwzorowaniami wielomianowymi.*

Problem

Od teraz X będzie zwartym algebraicznym podzbiorem $\mathbb{R}^n (=$ zwartą quasi-rzutową rzeczywistą rozmaitością algebraiczną). Czy można uzyskać podobne „twierdzenie o gęstości” dla $f: X \to Y$ gdzie Y jest też zbiorem algebraicznym?

Problem

Od teraz X będzie zwartym algebraicznym podzbiorem $\mathbb{R}^n$($=$ zwartą quasi-rzutową rzeczywistą rozmaitością algebraiczną). Czy można uzyskać podobne „twierdzenie o gęstości" dla $f\colon X \to Y$ gdzie Y jest też zbiorem algebraicznym? Co dla $Y = \mathbb{S}^p$?

Problem

Od teraz X będzie zwartym algebraicznym podzbiorem $\mathbb{R}^n (=$ zwartą quasi-rzutową rzeczywistą rozmaitością algebraiczną). Czy można uzyskać podobne „twierdzenie o gęstości" dla $f: X \to Y$ gdzie Y jest też zbiorem algebraicznym? Co dla $Y = \mathbb{S}^p$?

- Nie zawsze istnieją niestałe odwzorowania wielomianowe $X \to Y$, np. $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$, gdzie $2^l = n > m$.

Problem

Od teraz X będzie zwartym algebraicznym podzbiorem $\mathbb{R}^n (=$ zwartą quasi-rzutową rzeczywistą rozmaitością algebraiczną). Czy można uzyskać podobne „twierdzenie o gęstości" dla $f : X \to Y$ gdzie Y jest też zbiorem algebraicznym? Co dla $Y = \mathbb{S}^p$?

- Nie zawsze istnieją niestałe odwzorowania wielomianowe $X \to Y$, np. $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$, gdzie $2^l = n > m$.
- Bardziej naturalne są odwzorowania regularne $\mathcal{R}(X, \mathbb{S}^p)$. Może $\mathcal{R}(X, \mathbb{S}^p)$ jest gęsty w $\mathcal{C}(X, \mathbb{S}^p)$?

Problem

Od teraz X będzie zwartym algebraicznym podzbiorem $\mathbb{R}^n$($=$ zwartą quasi-rzutową rzeczywistą rozmaitością algebraiczną). Czy można uzyskać podobne „twierdzenie o gęstości" dla $f\colon X \to Y$ gdzie Y jest też zbiorem algebraicznym? Co dla $Y = \mathbb{S}^p$?

- Nie zawsze istnieją niestałe odwzorowania wielomianowe $X \to Y$, np. $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$, gdzie $2^l = n > m$.
- Bardziej naturalne są odwzorowania regularne $\mathcal{R}(X, \mathbb{S}^p)$. Może $\mathcal{R}(X, \mathbb{S}^p)$ jest gęsty w $\mathcal{C}(X, \mathbb{S}^p)$?
- Tak jest gdy $\dim X < \dim Y$ - zaraz do tego wrócimy.

Problem

Od teraz X będzie zwartym algebraicznym podzbiorem $\mathbb{R}^n$(= zwartą quasi-rzutową rzeczywistą rozmaitością algebraiczną). Czy można uzyskać podobne „twierdzenie o gęstości" dla $f\colon X \to Y$ gdzie Y jest też zbiorem algebraicznym? Co dla $Y = \mathbb{S}^p$?

- Nie zawsze istnieją niestałe odwzorowania wielomianowe $X \to Y$, np. $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^m$, gdzie $2^l = n > m$.
- Bardziej naturalne są odwzorowania regularne $\mathcal{R}(X, \mathbb{S}^p)$. Może $\mathcal{R}(X, \mathbb{S}^p)$ jest gęsty w $\mathcal{C}(X, \mathbb{S}^p)$?
- Tak jest gdy $\dim X < \dim Y$ - zaraz do tego wrócimy.
- W ogólności często mamy przeszkody natury topologicznej - nie każda klasa homotopii odwzorowań $[X, \mathbb{S}^p]$ może być reprezentowana przez odwzorowanie regularne.

Definicja

Powiemy, że ciągłe odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest regulous $\iff$ istnieje skończony rozkład $\mathcal{S}$ zbioru X na rozłączne Zariski lokalnie domknięte podzbiory, takie że $f|_S$ jest regularne dla każdego $S \in \mathcal{S}$. Oznaczmy zbiór wszystkich takich odwzorowań $X \to Y$ przez $\mathcal{R}^0(X; Y)$.

Regulous maps

Definicja

Powiemy, że ciągłe odwzorowanie $f\colon X \to Y$ jest regulous $\iff$ istnieje skończony rozkład $\mathcal{S}$ zbioru X na rozłączne Zariski lokalnie domknięte podzbiory, takie że $f|_S$ jest regularne dla każdego $S \in \mathcal{S}$. Oznaczmy zbiór wszystkich takich odwzorowań $X \to Y$ przez $\mathcal{R}^0(X;Y)$.

Przykład

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dana przez:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2},\ gdy\ x \neq (0,0), \\ 0,\ gdy\ x = (0,0) \end{cases}$$

Wyniki

Twierdzenie (Kucharz, Kurdyka, 2013)

Niech X będzie zwartym rzeczywistym zbiorem algebraicznym wymiaru $p \geqslant 1$. Wtedy każde ciągłe odwzorowanie $X \to \mathbb{S}^p$ jest homotopijne z pewnym odwzorowaniem regulous.

Wyniki

Twierdzenie (Kucharz, Kurdyka, 2013)

Niech X *będzie zwartym rzeczywistym zbiorem algebraicznym wymiaru* $p \geqslant 1$*. Wtedy każde ciągłe odwzorowanie* $X \to \mathbb{S}^p$ *jest homotopijne z pewnym odwzorowaniem regulous.*

Twierdzenie (Kucharz, 2015)

Jeśli dodatkowo X *jest nieosobliwy to* $\mathcal{R}^0(X, \mathbb{S}^p)$ *jest gęsty w* $\mathcal{C}(X, \mathbb{S}^p)$*.*

Wyniki

Twierdzenie (Kucharz, Kurdyka, 2013)

Niech X będzie zwartym rzeczywistym zbiorem algebraicznym wymiaru $p \geqslant 1$. Wtedy każde ciągłe odwzorowanie $X \to \mathbb{S}^p$ jest homotopijne z pewnym odwzorowaniem regulous.

Twierdzenie (Kucharz, 2015)

Jeśli dodatkowo X jest nieosobliwy to $\mathcal{R}^0(X, \mathbb{S}^p)$ jest gęsty w $\mathcal{C}(X, \mathbb{S}^p)$.

Twierdzenie (Z., 2017)

Niech X będzie zwartym rzeczywistym zbiorem algebraicznym wymiaru $p \geqslant 1$. Wtedy $\mathcal{R}^0(X, \mathbb{S}^p)$ jest gęsty w $\mathcal{C}(X, \mathbb{S}^p)$.

Kohomologie algebraiczne

Definicja

X - zwarty nieosobliwy algebraiczny. Klasę kohomologii w $H^*(X;\mathbb{Z}/2)$ nazwiemy algebraiczną jeśli jest dualna w sensie Poincaré do klasy homologii w $H_*(X;\mathbb{Z}/2)$ reprezentowanej przez zbiór algebraiczny.

Kohomologie algebraiczne

Definicja

X - zwarty nieosobliwy algebraiczny. Klasę kohomologii w $H^*(X;\mathbb{Z}/2)$ nazwiemy algebraiczną jeśli jest dualna w sensie Poincaré do klasy homologii w $H_*(X;\mathbb{Z}/2)$ reprezentowanej przez zbiór algebraiczny.

Fakt

Zbiór $H^*_{alg}(X;\mathbb{Z}/2)$ *wszystkich algebraicznych klas kohomologii jest podpierścieniem* $H^*(X;\mathbb{Z}/2)$. *Ponadto jeśli* $f: X \to Y$ *jest odwzorowaniem regularnym, to* $f^*(H^*_{alg}(Y;\mathbb{Z}/2)) \subset H^*_{alg}(X;\mathbb{Z}/2)$.

Lemat

Lemat

Niech $A \subset X$ Zariski domknięty. Niech $f\colon X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ odwzorowanie ciągłe, którego zacieśnienie $f|_A\colon A \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ jest regularne. Załóżmy ponadto, że

$$f^*(H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); \mathbb{Z}/2)) \subset H^1_{\mathrm{alg}}(X; \mathbb{Z}/2).$$

Wtedy można znaleźć regularne $g\colon X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ dowolnie blisko f takie, że $g|_A = f|_A$ (każde otoczenie f w $\mathcal{C}(X, \mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ zawiera takie odwzorowanie).

Uwaga

Należy rozważyć pullback wiązki tautologicznej na $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ przez f. Warunek zapewnia mu strukturę wiązki algebraicznej.

Dowód

Niech $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{S}^p)$, chcemy znaleźć blisko odwzorowanie regulous. Oznaczmy zbiór punktów osobliwych X przez Σ.

Dowód

Niech $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{S}^p)$, chcemy znaleźć blisko odwzorowanie regulous. Oznaczmy zbiór punktów osobliwych X przez Σ.

- Zastępując f restrykcją gładkiego (tj. $\mathcal{C}^\infty$) odwzorowania f_0, mamy $f_0(\Sigma) \subsetneq \mathbb{S}^p$, ponieważ $\dim \Sigma < p$.

Dowód

Niech $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{S}^p)$, chcemy znaleźć blisko odwzorowanie regulous. Oznaczmy zbiór punktów osobliwych X przez Σ.

- Zastępując f restrykcją gładkiego (tj. $\mathcal{C}^\infty$) odwzorowania f_0, mamy $f_0(\Sigma) \subsetneq \mathbb{S}^p$, ponieważ $\dim \Sigma < p$.
- To pozwala aproksymować $f_0|_\Sigma$ odwzorowaniami regularnymi przy pomocy projekcji stereograficznej i tw. Weierstrassa. (Prosty przypadek wspomniany wcześniej).

Dowód

Niech $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{S}^p)$, chcemy znaleźć blisko odwzorowanie regulous. Oznaczmy zbiór punktów osobliwych X przez Σ.

- Zastępując f restrykcją gładkiego (tj. $\mathcal{C}^\infty$) odwzorowania f_0, mamy $f_0(\Sigma) \subsetneq \mathbb{S}^p$, ponieważ $\dim \Sigma < p$.
- To pozwala aproksymować $f_0|_\Sigma$ odwzorowaniami regularnymi przy pomocy projekcji stereograficznej i tw. Weierstrassa. (Prosty przypadek wspomniany wcześniej).
- Możemy założyć, że f jest zacieśnieniem odwzorowania gładkiego i $f|_\Sigma$ jest regularne.

Dowód

Niech $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{S}^p)$, chcemy znaleźć blisko odwzorowanie regulous. Oznaczmy zbiór punktów osobliwych X przez Σ.

- Zastępując f restrykcją gładkiego (tj. $\mathcal{C}^\infty$) odwzorowania f_0, mamy $f_0(\Sigma) \subsetneq \mathbb{S}^p$, ponieważ $\dim \Sigma < p$.
- To pozwala aproksymować $f_0|_\Sigma$ odwzorowaniami regularnymi przy pomocy projekcji stereograficznej i tw. Weierstrassa. (Prosty przypadek wspomniany wcześniej).
- Możemy założyć, że f jest zacieśnieniem odwzorowania gładkiego i $f|_\Sigma$ jest regularne.
- Ustalmy $s_0 \in \mathbb{S}^p \setminus f(\Sigma)$ - wartość regularną $f|_{X \setminus \Sigma}$.

Dowód

Chcemy użyć lematu - potrzebny jest zbiór nieosobliwy. Rozwiążmy osobliwości X - istnieje skończone złożenie rozdmuchań $\pi \colon Y \to X$ nad Σ takie, że Y jest nieosobliwe. Niech $F = (f \circ \pi)^{-1}(s_0)$ (zauważmy, że ten zbiór jest skończony) i rozważmy diagram:

$$\begin{array}{ccc}
B(Y,F) & \xrightarrow{g} & B(\mathbb{S}^p, s_0) \\
\sigma \downarrow & & \tau \downarrow \\
Y & \xrightarrow{f\circ\pi} & \mathbb{S}^p \\
\pi \downarrow & & \Vert \\
X & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^p
\end{array}$$

Chcemy zastąpić g odwzorowaniem regularnym H zgodnym z f.

$$\begin{array}{ccc} B(Y,F) & \xrightarrow{g} & B(\mathbb{S}^p, s_0) \\ {\scriptstyle \pi\circ\sigma}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \tau} \\ X & \xrightarrow{f\circ\pi} & \mathbb{S}^p \end{array}$$

Niech $D = \sigma^{-1}(F)$ i $E = \tau^{-1}(s_0)$. Wtedy D i E są nieosobliwymi algebraicznymi hiperpowierzchniami w Y i $\mathbb{S}^p$. Stosując lemat do odwzorowania $D \to E$ indukowanego przez g, możemy zastąpić g przez dowolnie bliskie regularne $r\colon D \to E$. Da się tak zrobić, bo

$$E \cong \mathbb{P}^{p-1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^p(\mathbb{R}) \cong B(\mathbb{S}^p, s_0)$$

i g jest transwersalne do E.

Co z $L = (\pi \circ \sigma)^{-1}(\Sigma)$? Rozważmy regularne odwzorowanie $h\colon \Sigma \to B(\mathbb{S}^p, s_0)$ dane przez $(\tau|_{\tau^{-1}(\mathbb{S}^p \setminus \{s_0\})})^{-1} \circ (f|_\Sigma)$.

Zbiory E i L są rozłączne, więc istnieje gładkie $G\colon B(Y, F) \to B(\mathbb{S}^p, s_0)$ zgodne z r i h. Jeśli G jest wystarczająco blisko g, mamy $g^* = G^*$ i stosując lemat do G z $A = D \cup L$ dostajemy regularne odwzorowanie $H\colon B(Y, F) \to B(\mathbb{S}^p, s_0)$. Pozostaje „zejść z nim na dół”.

$$\begin{array}{ccc}
B(Y,F) & \xrightarrow{H} & B(\mathbb{S}^p, s_0) \\
\sigma \downarrow & & \tau \downarrow \\
Y & \xrightarrow{\bar{H}} & \mathbb{S}^p \\
\pi \downarrow & & \| \\
X & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{S}^p
\end{array}$$

Dowód

$$\begin{array}{ccc}
B(Y,F) & \xrightarrow{H} & B(\mathbb{S}^p, s_0) \\
\sigma\big\downarrow & & \tau\big\downarrow \\
Y & \xrightarrow{\bar{H}} & \mathbb{S}^p \\
\pi\big\downarrow & & \big\| \\
X & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{S}^p
\end{array}$$

$$\bar{H}(y) = \begin{cases} s_0, \text{ for } y \in F, \\ \tau(H(\sigma^{-1}(y))), \text{ for } y \notin F, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ for } x \in \Sigma, \\ \bar{H}(\pi^{-1}(x)), \text{ for } x \notin \Sigma, \end{cases}$$

Dowód

$$\begin{array}{ccc}
B(Y,F) & \xrightarrow{H} & B(\mathbb{S}^p, s_0) \\
\sigma\big\downarrow & & \tau\big\downarrow \\
Y & \xrightarrow{\bar{H}} & \mathbb{S}^p \\
\pi\big\downarrow & & \big\| \\
X & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{S}^p
\end{array}$$

$$\bar{H}(y) = \begin{cases} s_0, \text{ for } y \in F, \\ \tau(H(\sigma^{-1}(y))), \text{ for } y \notin F, \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \text{ for } x \in \Sigma, \\ \bar{H}(\pi^{-1}(x)), \text{ for } x \notin \Sigma, \end{cases}$$

Pozostaje sprawdzić, że $\tilde{f}$ jest regulous. Łatwo zobaczyć, że zacieśnienia do Σ, $f^{-1}(s_o)$, i $X \setminus (\Sigma \cup f^{-1}(s_o))$ są regularne, co kończy dowód.

Co dalej?

- Co z przypadkiem $\dim X > p$?

Co dalej?

- Co z przypadkiem $\dim X > p$?
- Budowa geometrii w tej klasie (rozmaitości, snopy, itd.).