**MATERIAŁY NA XXVII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

**2006** **Łódź** **str. 9**

# KRZYWE ALGEBRAICZNE
# I WZÓR POINCARÉGO–HOPFA

Maciej Borodzik, Henryk Żołądek (Warszawa)

**Streszczenie**

Stosując wzór Poincarégo–Hopfa do pewnego hamiltonowskiego pola wektorowego związanego z krzywą algebraiczną, wyliczamy niezmienniki osobliwości tej krzywej. Jako zastosowanie podajemy dowód twierdzenia Abhyankara–Moha–Suzuki.

## 1. Indeks hamiltonowskiego pola wektorowego

*Indeksem* $i_{x_0}X$ pola wektorowego $X(x)$ w $\mathbb{R}^n$ w (izolowanym) punkcie osobliwym $x_0$, $X(x_0) = 0$, nazywamy stopień topologiczny odwzorowania $x \to \frac{X(x)}{|X(x)|}$ z małej sfery wokół $x_0$ do $S^{n-1}$.

Słynny *wzór Poincarégo–Hopfa* dotyczy pola wektorowego $X$ na rozmaitości $M$ z izolowanymi punktami osobliwymi i mówi, że

$$\sum_x i_x X = \chi(M), \tag{1.1}$$

*Mathematics Subject Classification 2000*: Primary 14H50; Secondary 32S05
*Key words and phrases*: Płaska krzywa algebraiczna, indeks pola wektorowego
Praca napisana w ramach tematu KBN No 1 P03A 015 29

gdzie suma przebiega po punktach osobliwych a $\chi$ oznacza charakterystykę Eulera rozmaitości.

Poniżej podajemy kilka przykładów liczenia indeksu dla pól wektorowych w $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}^1$, ze zmienną zespoloną $z = x_1 + ix_2$.

Jeśli pole wektorowe jest holomorficzne, tzn. $\dot{z} = V(z)$ z holomorficzną funkcją $V(z)$, to $i_0V = m$, gdzie $m$ jest krotnością zera $z = 0$ funkcji $V$, $V(z) = az^m + h.o.t.$, $a \neq 0$.

Jeśli odpowiednie autonomiczne równanie różniczkowe przyjmuje postać $\dot{z} = a\bar{z}^m + h.o.t$, to indeks w $z = 0$ wynosi $-m$.

Można także określić indeks w $z = 0$ dla meromorficznego pola wektorowego z biegunem w $z = 0$, $V(z) = az^{-k} + h.o.t.$ Wtedy $i_0V = -k$. Ten indeks jest taki sam jak dla pola $f(z,\bar{z})V(z)$, gdzie $f(z,\bar{z}) = |z|^{2k} > 0$ (poza $z = 0$) jest funkcją wygładzającą.

A oto jedno z zastosowań wzoru (1.1). Jeśli $V(z)$, $z \in (D, 0)$, jest holomorficznym polem wektorowym w dysku $D = \{|z| < \varepsilon\}$ , z jedynym punktem osobliwym w $z = 0$ to możemy określić pewne pole wektorowe na sferze $M = D/\partial D$, powstającej przez ściągnięcie brzegu dysku do punktu. To pole zadaje się wzorem $X = f(z,\bar{z})V(z)$, gdzie $f(z,\bar{z})$ jest funkcją zerującą się na $\partial D$ a poza tym dodatnią. Wtedy $X$ ma w $M$ dwa punkty osobliwe: $z = 0$, z indeksem $m = ord_0V$, i $[\partial D]$ , z indeksem $2 - m$.

Po tym wstępie przejdźmy do przypadku holomorficznych pól wektorowych w $\mathbb{C}^2$.

Niech $A \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ będzie kiełkiem krzywej analitycznej zadanej rówaniem $G(x, y) = 0$. Rozważmy (zespolone) hamiltonowskie pole wektorowe

$$X_G = \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}.$$

To pole można traktować jako holomorficzne pole wektorowe, z zespolonym czasem na krzywych fazowych (które są powierzchniami Riemanna). Oczywiście jest to również rzeczywiste pole wektorowe w $\mathbb{R}^4$.

*Ćwiczenie.* Pokazać, że rzeczywiste pole $X_G$ jest również hamiltonowskie z $\mathrm{Re}\, G$ jako funkcją Hamiltona, ale względem struktury symplektycznej zadanej przy pomocy formy $d\,\mathrm{Re}\, x \wedge d\,\mathrm{Re}\, y - d\,\mathrm{Im}\, x \wedge d\,\mathrm{Im}\, y$.

Ponieważ funkcja $G$ jest całką pierwszą dla pola $X_G$, to to pole jest styczne do krzywej $A$. Zatem mamy pole wektorowe

$$Y := X_G|_A.$$

Jeśli 0 jest izolowanym punktem osobliwym $A$, to i pole $X_G$ ma osobliwość w tym punkcie.

Rozważmy przekształcenie *normalizacji* $N : \widetilde{A} \to A$. Jeśli $A = A_1 + \ldots + A_k$ składa się z nieprzywiedlnych składowych $A_j$, to $\widetilde{A} = \widetilde{A}_1 \sqcup \ldots \sqcup \widetilde{A}_k$ (rozłączna suma), gdzie każde $\widetilde{A_j}$ jest dyskiem izomorficznym z $D$. Niech $N_j = N|_{\widetilde{A}_j}$ i $p_j = N_j^{-1}(0)$. Możemy 'cofnąć' pole $Y$ z $A$ do $\widetilde{A}$ : dostaniemy pole wektorowe

$$\widetilde{Y} = N^*Y := ((N_*)^{-1}Y) \circ N$$

na gładkiej rozmaitości z punktami osobliwymi $p_j$. Zatem możemy określić indeksy $i_{p_j}\widetilde{Y}$.

Okazuje się, że te indeksy (lub ich suma) są związane z pewnymi klasycznymi niezmiennikami krzywej.

1.2. **Lemat** (Milnor [Mil], Lins-Neto [Lins]). *Jeśli $A = A_1$ jest nieprzywiedlna, to*

$$i_{p_1}\widetilde{Y} = \mu_0(G),$$

*gdzie $\mu_0(G)$ jest liczbą Milnora funkcji $G$ w punkcie 0.*

*Jeśli $A = A_1 + \ldots + A_k$, to*

$$\sum_j i_{p_j}\widetilde{Y} = \sum_j \mu_0(A_j) + 2\sum_{i<j}(A_i \cdot A_j)_0,$$

*gdzie $(A_i \cdot A_j)_0$ oznacza indeks przecięcia w 0 składowych $A_i$ i $A_j$. (W szczególności, jeśli 0 jest prostym punktem podwójnym $A = A_1 + A_1$, to $i_{p_1}\widetilde{Y} + i_{p_2}\widetilde{Y} = 2$.) Ponadto, liczba Milnora całego zbioru $A$ wynosi*

$$\mu_0(A) = 2\delta_0 - k + 1.$$

*Dowód.* Niech $A$ będzie nieprzywiedlna. Liczba Milnora $\mu_0(G) = \mu_0(A)$ równa się pierwszej liczbie Bettiego następującej rozmaitości z brzegiem: $A_z = B_\rho \cap \{G = z\}$, gdzie $B_\rho$ jest kulą wokół 0 o małym promieniu $\rho$ zaś $z$ jest małą niekrytyczną wartością $G$ (twierdzenie Milnora). Pole wektorowe $X_G|_{A_z}$ nie znika i jego indeks wzdłuż brzegu $\partial A_z$ wynosi $i_{p_1}\widetilde{Y}$. Rozważmy rozmaitość $M = A_z/\partial A_z$ i pole wektorowe $Z = f \cdot X_G$ on $M$ takie, że $f > 0$ w $A_z \setminus \partial A_z$ i $f = 0$ na $\partial A_z$. Wiemy, że $i_{[\partial A_z]}Z = 2 - i_{p_1}\widetilde{Y}$. Wzór Poincarégo–Hopfa mówi, że $\chi(M) = 2 - \mu_0(G)$ równa się $\sum i_q Z$.

Dowód wzoru na $\mu_0(G)$ w przypadku $k$ składowych przebiega analogicznie. Tylko tutaj rozmaitość $A_z$ ma brzeg składający się z $k$ okręgów i indeks pola $X_G|_{A_z}$ wzdłuż każdego z nich wynosi odpowiednio $i_{p_j}\widetilde{Y}$. Po ściągnięciu tych okręgów do punktów dostaje się rozmaitość $M$ bez brzegu genusu $g(M) = \frac{1}{2}(\mu_0(A) - k + 1)$ i odpowiednie pole wektorowe $Z = fX_G$ a $k$ punktami osobliwymi o indeksach $2 - i_{p_j\widetilde{Y}}$. Zatem $2 - (\mu_0(A) - k + 1) = \chi(M) = \sum(2 - i_{p_j}\widetilde{Y}) = 2k - \sum i_{p_j}\widetilde{Y}$.

Niech $\mathbb{C}, 0) \to (A_j, 0)$, $z \to (x(z), y(z))$ będzie lokalną parametryzacją (normalizacją) kiełka $A_j$. Załóżmy także, że współrzędne $x, y$ są tak wybrane, że $A_j$ nie leży w prostej $x = 0$. Wtedy dostajemy

$$\dot{z} = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-1}\frac{\partial G}{\partial y}|_{A_j} \quad \text{i} \quad i_{p_j}\widetilde{Y} = \mathrm{ord}_{z=0}\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-1}\frac{\partial G}{\partial y}|_{A_j}.$$

Jeśli $G = G_1 \ldots G_k$, gdzie $G_j$ definiują $A_j$, to $\mathrm{ord}_{z=0}\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-1}\frac{\partial G}{\partial y}|_{A_j} = \mathrm{ord}_{z=0}\left(\frac{\partial G_j}{\partial y}/\frac{dz}{dx}\right)|_{A_j} + \sum_{i\neq j}\mathrm{ord}_{z=0}G_i|_{A_j} = \mu_0(A_j) + \sum_{i\neq j}(A_i \cdot A_j)_0$. To dowodzi środkowego wzoru w lemacie. $\square$

Wielkość

$$\delta_0 := \frac{1}{2}\sum_j i_{p_j}\widetilde{Y} \tag{1.3}$$

będziemy nazywać *liczbą punktów podwójnych A ukrytych w* 0.

W ksiązce J.-P. Serre'a [Ser] można znaleźć algebraiczną definicję liczby punktów podwójnych. W istocie, obie definicje są zgodne. W literaturze niezmiennik $\delta_0$ jest też nazywany *$\delta$-niezmiennikiem* osobliwości lub *wirtualną liczbą punktów podwójnych.*

1.4. **Lemat**. *Liczba $\delta_0$ równa się liczbie prostych punktów podwójnych dla typowego zaburzenia $N'$ przekształcenia normalizacji $N : \widetilde{A}_1 \sqcup \ldots \sqcup \widetilde{A}_k \to \mathbb{C}^2$.*

*Dowód.* Jeśli w dysku $\widetilde{A_j}$ po zaburzeniu pozostają tylko przeciwobrazy prostych punktów podwójnych, to liczba takich przeciwobrazów równa się sumie indeksów pola $\widetilde{Y}'|_{\widetilde{A}_j} = (N')^* X_{G'}|_{\widetilde{A}_j}$. Ale ta suma to indeks pola $\widetilde{Y}'$ wzdłuż $\partial A_j$. Ten ostatni indeks równa się indeksowi pola $\widetilde{Y}|_{\widetilde{A}_j}$ w $p_j$.

Sumując to wszystko po $j$, dostaje się podwojoną liczbę punktów podwójnych zaburzenia. $\square$

1.5. **Uwaga**. Nasz dowód Lematu 1.2 jest inny (i być może prostszy) od dowodów podanych w [Lins] i [Mil].

Nasza definicja liczby $\delta_0$ jest w istocie topologiczna. Zauważmy, że można ją określić jako sumę indeksów hamiltonowskiego pola wektorowego $X_G$ wzdłuż pętli $K_i = A_i \cap \partial B_\rho$ w składowych $A_i$. Milnor pytał w [Mil, Remark 10.9] czy liczba $\delta_0$ równa się minimalnej liczbie puntów podwójnych sumy $S = \bigcup D_i$ immersyjnych (ale niekoniecznie holomorficznych) dysków $D_i$ w $B_\rho$ z brzegami $K_i$, tj. liczbie gordyjskiej splotu $K = \cup K_i$.

Hipoteza Milnora została udowodniona przez P. Kronheimera i T. Mrowkę w [KM1]. Ich dowód opiera się na innym ich twierdzeniu:

*dla dowolnej (rzeczywistej) powierzchni $\Sigma$ (genusu $g(\Sigma)$) w K3 powierzchni $X$ (tj. $H^1(X) = 0$ i wiązka $K_X$ trywialna) reprezentującej tę samą 2–wymiarową klasę homologii co gładka zepolona krzywa $C \subset X$ zachodzi nierówność*

$$2g(\Sigma) - 2 \geqslant \Sigma \cdot \Sigma = 2g(C) - 2.$$

Niektórzy autorzy (patrz [Ru1, Ru2]) nazywają powyższą nierówność hipotezą Thoma. W istocie hipoteza Thoma dotyczy nierówności $g(\Sigma) \geqslant g(C)$ dla powierzchnii w $\mathbb{CP}^2$ (która nie jest K3). Hipoteza Thoma zstała udowodniona również przez Kronheimera i Mrowkę w [KM2]. Ponadto, dowody w [KM1] i [KM2] używają innych niezmianników: niezmienników Donaldsona przestrzeni moduli instantonowych rozwiązań równań Yanga–Millsa (w [KM1]) i niezmienników Seiberga–Wittena (dyskretnej) przestrzeni moduli monopolowych rozwiązań równań Yanga–Millsa–Higgsa (w [KM2]).

Jeśli udałoby się znaleźć pole wektorowe $X$ na $\Sigma$ takie, że $X|_K = X_G|_K$ z indeksami w punktach podwójnych równymi odpowiednim indeksom przecięcia, to można byłoby podać nowy dowód hipotezy Milnora. Jak dotąd nie udało nam się znaleźć takiego pola.

Odnotujmy jeszcze interpretację następującego *Lematu Teissiera* (patrz [Plo]):

$$(G, \partial G/\partial y)_0 = \mu_0(G) + (G, x)_0 - 1, \tag{1.6}$$

w terminach hamiltonowskiego pola wektorowego. W (1.6) funkcja $G$ jest nieprzywiedlna i $(F, H)_0$ oznacza indeks przecięcia w 0 krzywych $F = 0$ i $H = 0$.

Istotnie, mamy $\dot{x} = \partial G/\partial y$ dla pierwszej składowej układu Hamiltona. Używając normalizacji $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$, $z \in (\mathbb{C}, 0)$, dostajemy

$$\dot{z} = [\varphi'(z)]^{-1} \frac{\partial G}{\partial y}(\varphi(z), \psi(z)).$$

Przypomnijmy, że $\mu_0(G)$ jest krotnością w $z = 0$ prawej strony ostatniej równości. Zatem wynosi ona $\mathrm{ord}_0 \frac{\partial G}{\partial y}(\varphi(z), \psi(z))$ minus $\mathrm{ord}_0 \varphi'$. Ale $\mathrm{ord}_0 \frac{\partial G}{\partial y}(\varphi(z), \psi(z)) = (G, \partial G/\partial y)_0$, $\mathrm{ord}_0\varphi' = \mathrm{ord}_0\varphi - 1$ i $\mathrm{ord}_0\varphi = (G, x)_0$.

Teraz wykorzystamy hamiltonowskie pole wektorowe do wyliczenia liczby Milnora osobliwości nieprzywiedlnej krzywej w terminach tzw. par charakterystycznych. Lokalnie krzywą $A$ można zadać w postaci parametrycznej

$$x = z^n, \quad y = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \ldots,$$

jest to rozwinięcie Puiseux; przy tym można założyć, że $n < m$ i $n \nmid m$. To rozwinięcie można przedstawić w następującej (topologicznie zaaranżowanej) formie

$$\begin{aligned} y &= x^{m_1/n_1}\left[d_1 + \ldots + x^{m_2/n_1 n_2}\left[d_2 + \ldots + \ldots x^{m_r/n_1 \ldots n_r}[d_r + \ldots] \ldots\right]\right] \\ &= \left(d_1 x^{v_1/n} + \ldots\right) + \left(d_2 x^{v_2/n} + \ldots\right) + \ldots + \left(d_r x^{v_r/n} + \ldots\right). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Tutaj $m_1 = v_1 > 1$, $n_j > 1$, $n = n_1 \ldots n_r$, $v_j = m_1 n_2 \ldots n_r + m_2 n_3 \ldots n_r + \ldots + m_j n_{j+1} \ldots n_r$ oraz $\mathrm{nwd}(m_j, n_j) = \mathrm{nwd}(v_j, n_j) = 1$. Ponadto, $d_j \neq 0$ i kropki oznaczają potęgi $x^{1/p_1 \cdots p_j}$ w $j$-ym składniku. Pary $(n_1, m_1), (n_2, m_2), \ldots, (n_r, m_r)$ nazywają się *parami charakterystycznymi.*

1.8. **Stwierdzenie.**([Mil]) *Liczba Milnora osobliwości (1.7) wyraża się wzorem*

$$\mu_0(A) = (v_1 - 1)(n_1 - 1)n_2 \ldots n_r + (v_2 - 1)(n_2 - 1)n_3 \ldots n_r + \ldots + (v_r - 1)(n_r - 1).$$

*Dowód.* Wzór (1.7) definiuje jedną gałąź $y = f_{\zeta^*}(x)$ wielowartościowego rozwiązania równania $F(x, y) = 0$. Pozostałe gałęzie przyjmują postać $y = f_\zeta(x) = \zeta_1\left[d_1 x^{v_1/n} + \ldots + \zeta_2\left[d_2 x^{v_2/n} + \ldots + \zeta_r\left[d_r x^{v_r/n} + \ldots\right] \ldots\right]\right]$, gdzie $\zeta_1$ przyjmuje $p_1$ wartości, $\zeta_2$ przyjmuje $p_2$ wartości, itd. Mamy $\zeta^* = (1, \ldots, 1)$. Funkcję $F$ można przedstawić w postaci $F = \prod_\zeta (y - f_\zeta(x))$.

Równanie Hamiltona w $\widetilde{A}$ ma postać $\dot{x} = F_y$, czyli

$$\dot{z} = (1/n + \ldots)\, z^{-n+1} (\partial F/\partial y)|_C = (-1/n + \ldots) \cdot z^{-n+1} \prod_{\zeta \neq \zeta^*} (y - f_\zeta(x))|_C.$$

W ostatnim iloczynie mamy: $(n_1 - 1)n_2 \ldots n_r$ czynników z asymptotyką $x^{v_1/n} \sim z^{v_1}, \ldots, (n_r - 1)$ czynników z asymptotyką $x^{v_r/n} \sim z^{v_r}$. Zatem $\dot{z} = z^\alpha$ dla $\alpha =$

$\mu_0(A) = -n+1+v_1(n_1-1)n_2 \dots n_r+v_2(n_2-1)n_3 \dots n_r+\dots+v_r(n_r-1)$. Ponieważ $n-1 = (n_1-1)n_2 \dots n_r + (n_2-1)n_3 \dots n_r + \dots + (n_r-1)$, dostajemy żądaną formułę. $\square$

## 2. Krzywe algebraicznne

Zastosujemy teraz hamiltonowskie pole wektorowe $X_F$ w przypadku gdy $F(x,y)$ jest wielomianem definującym afiniczną krzywą $C_0$ w $\mathbb{C}^2$ (i rzutową krzywą $C$ w $\mathbb{CP}^2$).

Rozważmy najpierw przypadek, gdy $C$ jest ogólną gładką krzywą stopnia $d$. Wtedy $C$ jest gładka w $\mathbb{C}^2$ i pole wektorowe $Y = X_F|_{C_0}$ nie ma skończonych punktów osobliwych. Ale $Y$ ma bieguny w punktach przecięcia $C$ z prostą $L_\infty$ w nieskończoności. Jeśli $F = \prod_{j=1}^{d}(y-u_jx)+l.o.t$, to $L_\infty \cap C = \{(1:u_j:0)\}_{j=1,\dots,d}$ i możemy założyć, że są to różne punkty. Każda lokalna gałąź $y = u_jx + l.o.t.$ w nieskończoności jest parametryzowana przez $z = \frac{1}{x}$. Wtedy

$$\dot{z} = -z^2\left(\prod_{i\neq j}(y-u_ix)+l.o.t.\right)|_{y\approx u_ix} = c\cdot z^{3-d}+l.o.t.$$

Stąd wynika, że suma indeksów pola $Y$ w nieskończoności wynosi $d\cdot(3-d)$. Zatem wzór Poincarégo–Hopfa daje nam znaną *formułę dołączania* $\chi(C) = d(3-d)$, lub

$$g(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Tu można jeszcze coś dodać. Łatwo policzyć, że w zwykłym cuspie ukrywa się tylko jeden punkt podwójny. Zatem można policzyć genus krzywej z osobliwościami najprostszego typu, cuspy i zwykłe punkty podwójne. Jest to genus normalizacji krzywej. Wynosi on

$$g(C) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - \#\mathit{cusp\acute{o}w} - \#\mathit{p.podw\acute{o}jnych}.$$

Jest to znany *wzór Plückera*.

Rozważmy teraz przypadek afinicznych krzywych wymiernych z jednym miejscem w nieskończoności. Te krzywe będziemy definiować za pomocą parametryzacji

$$N: x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

gdzie $\varphi = t^p+l.o.t.$ i $\psi = t^q+l.o.t.$ są wielomianami stopni $p$ i $q$ odpowiednio. Można dokonywać tutaj pewnych zamian: parametru $t \to \lambda t + \mu$ i zmiennych fazowych. Twierdzenie Junga–van der Kulka mówi, że te ostatnie są złożeniami przekształceń elementarnych postaci $(x, y+P(x))$, $(x+Q(y), y)$ i przekształceń liniowych (w istocie jednokładności). Łatwo widać, że pozostają dwie możliwości uproszczenia postaci krzywej: albo można ją wyprostować, tj. $x = t$, $y = 0$, albo mamy

$$p < q, \quad q/p \notin \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Krzywa $C_0$ ma pewną liczbę punktów podwójnych, być może ukrytych w punktach osobliwych. Do policzenia tej liczby użyjemy pola $\widetilde{Y} = N^*Y$ i rozwinięcia w szereg Puiseux w nieskończoności:

$$
\begin{aligned}
y &= x^{q_1/p_1}\left[d_1 + \ldots + x^{-q_2/p_1p_2}\left[d_2 + \ldots + \ldots x^{-q_r/p_1\ldots p_r}\left[d_r + \ldots\right]\ldots\right]\right] \\
&= \left(d_1 x^{v_1/p} + \ldots\right) + \left(d_2 x^{v_2/p} + \ldots\right) + \ldots + \left(d_r x^{v_r/p} + \ldots\right),
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

gdzie $p_j > 1$, $p = p_1 \ldots p_r$ i $\mathrm{nwd}(v_j, p_j) = \mathrm{nwd}(q_j, p_j) = 1$.

Ze wzoru Poincarégo–Hopfa wynika, że liczba punktów podwójnych $C_0$ równa się $1 - \frac{1}{2} i_\infty \widetilde{Y}$. Z drugiej strony indeks pola hamiltonowskiego w nieskończoności liczy się analogicznie jak w dowodzie Stwierdzenia 1.8. Stąd wynika następujące

2.3. **Stwierdzenie**. *W terminach (2.2) liczba punktów podwójnych krzywej $C_0$ wynosi*

$$\delta = \frac{1}{2}\sum (v_j - 1)(p_j - 1)p_{j+1}\ldots p_r.$$

2.4. **Wniosek**. *Typowa krzywa $C_0$ spełniająca (2.2) posiada maksymalną liczbę punktów podwójnych, równą*

$$\delta_{\max} := \frac{1}{2}\left[(p-1)(q-1) - (p'-1)\right],$$

*gdzie $p' = \mathrm{nwd}(p, q) = p_2 \ldots p_r$.*

*Dowód.* Trzeba założyć, że $v_2 = q - 1$, i skorzystać z ostatniego stwierdzenia. $\square$

2.5. **Uwaga**. Można dowieść Stwierdzenia 2.3 bezpośrednio, licząc liczbę punktów podwójnych blisko nieskończoności. Weźmy następującą parametryzację $C_0$ w nieskończoności $x = \tau^p, \quad y = \tau^q + c_1\tau^{q-1} + \ldots, \quad \tau \to \infty$. Równania $x(\tau') = x(\tau)$, $y(\tau') = y(\tau)$ na punkt podwójny dają $\tau' = \zeta^j\tau$, $\zeta = e^{2\pi i/p}$, $j = 1, \ldots, p-1$ i

$$(\zeta^{jq} - 1)\tau^q + c_1(\zeta^{j(q-1)} - 1)\tau^{q-1} + \ldots = 0. \tag{2.6}$$

Poszukujemy rozwiązań $\tau(\varepsilon)$ równania (2.6), które uciekają do nieskończoności, gdy współczynniki $c_k = c_k(\varepsilon)$ zależą od parametru $\varepsilon$ i $\varepsilon \to 0$. Takich rozwiązań nie ma gdy $\zeta^{jq} \neq 1$. Gdy $c_1(0) \neq 0$, to także wszystkie punkty podwójne pozostają skończone (nawet gdy $\zeta^{jq} = 1$).

Ale gdy $j = j_1 p_1$ (tj. $\zeta^{jq} = e^{2\pi i j_1 q_1} = 1$) i $c_1(0) = 0$ równanie (2.6) można rozwiązać asymptotycznie dla $\tau \to \infty$. To jest tak samo jakby rozwiązywać odpowiednie równanie algebraiczne. W ten sposób dostaje się dokładnie $2\delta_{\max} - 2\delta$ rozwiązań, gdzie $\delta$ i $\delta_{\max}$ są zdefinowane powyżej.

Pozostaje znaleźć liczbę $\delta_{\max}$, czyli liczbę punktów podwójnych dla pewnej specjalnej typowej krzywej (z $c_1 \neq 0$). Ta krzywa jest następująca: $x = t^p, y = (t-1)^q$. Jeśli $t, t'$ są przeciwobrazami punktu podwójnego, to leżą one w równych odległościach od punktu 0 i od punktu 1 w $\mathbb{C}$. Stąd wynika, że $t' = \bar{t}$ i że są one punktami przecięcia się $p-1$ promieni wychodzących z 0 w kierunkach $\frac{j\pi}{2p}$, $j = 1, \ldots p-1$, i $q-1$ promieni wychodzących z 1 w kierunkach $\frac{k\pi}{2q}$, $k = 1, \ldots q-1$. Dokładnie $p'-1$ par spośród tych promieni są równoległe.

Następny wynik to słynne twierdzenia Abhyankar–Moha–Suzuki [AM], [Suz], które doczekało się wielu dowodów. My podajemy topologiczny dowód pochodzący z pracy [Zol].

2.7. **Twierdzenie AMS**. *Jeśli krzywa $C_0$ spełnia (2.2), to posiada co najmniej* $\frac{1}{2}\left[(p_1-1)(q_1-1)-1\right]p'$, $p'=\mathrm{nwd}(p,q)$, $p_1=p/p'$, $q_1=q/p'$, *punktów podwójnych. Stąd wynika, że każdą gładką krzywą można wyprostować.*

*Dowód.* Nie da się udowodnić tego twierdzenia korzystając ze Stwierdzenia 2.3. A to dlatego, że nie mamy kontroli nad wykładnikami $v_j$. Taką kontrolę uzyskuje się dzięki tzw. *pierwiaskom przybliżonym*. Jest to następujące przedstawienie

$$\begin{array}{rcl} F_1 &=& y \\ F_2 &=& F_1^{p_1}-G_1=y^{p_1}-x^{q_1}+\dots \\ F_3 &=& F_2^{p_2}-G_2 \\ F_4 &=& F_3^{p_3}-G_3 \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ F_{r+1} &=& F_r^{p_r}-G_r \end{array} \tag{2.8}$$

i $F=F_{r+1}$.

Aby je skomentować wprowadźmy następującą quasi-jednorodną gradację $\widetilde{\deg}(x)=p$, $\widetilde{\deg}(y)=q$. Wtedy wielomiany $G_1-x^{q_1},G_2,\dots,G_r$ mają $\widetilde{\deg}$ mniejszy niż $\widetilde{\deg}(F_j^{p_j})=qp_1\dots p_j$ odpowiednio. Ponadto, jeśli $m_j=\deg F_j|_C$, to $\deg G_j|_C=m_jp_j>m_{j+1}$; oczywiście, $m_1=q$. To oznacza, że wyrazy wiodące w $F_j^{p_j}|_C$ i w $G|_C$ redukują się w $F_{j+1}|_C$. W [Zol] przedstawienie (2.8) uzyskuje się przez eliminację zmiennej $t$ z równań $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, ale my nie będziemy zatrzymywać się nad tym zagadnieniem.

Przy wyliczaniu indeksu pola $\widetilde{Y}$ w nieskończoności wykorzystuje się przedstawienie $F$ w postaci iloczynu

$$F(x,y)|_{x=\varphi(t)}=\prod_{\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_r)}(y-\psi_\zeta(t)),$$

gdzie każde $\zeta_j$ przyjmuje $p_j$ wartości i $\psi(t)=\psi_{\zeta^*}(t)$. Wtedy dla lokalnej zmiennej $z=1/t$ mamy $\dot{z}\approx const\cdot z^{p+1}\frac{\partial F}{\partial y}\approx const\cdot z^{p+1}\prod_{\zeta\neq\zeta^*}(y-\psi_\zeta(t))$ oraz $i_\infty\widetilde{Y}=p+1+\sum_{\zeta\neq\zeta^*}ord_\infty(\psi_{\zeta^*}-\psi_\zeta)$. Dlatego chcemy znaleźć przybliżone rozwinięcia funkcji $\psi_\zeta(t)$.

Drugie równanie w (2.8) przepisujemy w postaci

$$y^{p_1}=G_1(\varphi(t),y)+F_2, \tag{2.9}$$

gdzie $F_2|C=O(t^{m_2})$. Rozwiązujemy je metodą kolejnych przybliżeń. W pierwszym przybliżeniu kładziemy $y=0$ w $G_1$ i $F_2=0$. Dostajemy $p_1$ rozwiązań postaci $y=\zeta_1t^{m_1}+\dots$. Ustalamy $\zeta_1$ i znajdujemy kolejne przybliżenie podstawiając to ostatnie rozwiązanie w miejsce $y$ w $G_1$ i dalej trzymając $F_2=0$. Powtarzamy tę procedurę tyle razy aż zaczną się ustalać wyrazy z potęgami $t$ rzędów $\leqslant m_2-(p_1-1)m_1$, czyli rzędów porównywalnych z rzędami wyrazów pochodzących od $F_2$; zauważmy, że $(t^{p_1 m_1} + \ldots + O(t^{m_2}))^{1/p_1} = t^{m_1}(1 + O(t^{m_2 - p_1 m_1}))$. Oczywiście te wyrazy, które ustaliliśmy, zależą tylko od $\zeta_1$.

W trzecim równaniu w (2.8), czyli $F_2 = (G_2(\varphi(t), y) + F_3)^{1/p_2}$, najpierw kładziemy w miejsce $y$ szereg znaleziony przy rozwiązywaniu (2.9) i $F_3 = 0$. Dostaniemy $F_2 = \tilde{\zeta}_2(t^{m_2} + \ldots)$, gdzie $\tilde{\zeta}_2$ numeruje gałęzie. Tutaj współczynniki mogą zależeć od $\zeta_1$, ale potęga $m_2$ nie zależy od $m_1$; to wynika z faktu że w rozwinięciu Puiseux kolejne potęgi w istotnych wyrazach rozwinięcia (wyróżnionych w (2.2)) nie zależą od wyboru gałęzi. Teraz kontynuujemy poszukiwanie dalszych wyrazów rozwinięcia $y$, przy ustalonych $\zeta_1$ i $\zeta_2$. Oczywiście stosujemy metodę kolejnych przybliżeń. W ten sposób zafiksujemy z potęgami $t$ rzędów $\leqslant m_3 - (p_2 - 1)m_2 - (p_1 - 1)m_1$.

Powtarzając tę procedurę $r - 2$ razy dostajemy przedstawienie $p_1 \ldots p_r$ gałęzi funkcji algebraicznej $y = \psi_\zeta(t)$ zadanej równaniem $F(\varphi(t), y) = 0$ w postaci

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon(t) \quad = \quad & \zeta_1[t^{m_1} + \ldots + \zeta_2[t^{m_2-(p_1-1)m_1} + \cdots + \zeta_3[t^{m_3-(p_2-1)m_2-(p_1-1)m_1} \\ & + \cdots + \zeta_r[t^{m_r-(p_{r-1}-1)m_{r-1}-\ldots-(p_1-1)m_1}]\ldots]]],\end{aligned}$$

gdzie wyrazy oznaczone kropkami przed $\zeta_i$ nie zależą od $\zeta_i, \ldots, \zeta_r$ (ale zależą od $\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}$). Teraz można wyliczyć indeks pola $\widetilde{Y}$ w nieskończoności. Wynosi on

$$i_\infty \widetilde{Y} = p + 1 - [m_1(p_1 - 1) + m_2(p_2 - 1) + \ldots + m_r(p_r - 1)] \leqslant p + 1 - q(p_1 - 1).$$

Stąd i ze wzoru Poincarégo–Hopfa znajdujemy $\delta = \frac{1}{2}(1 - i_\infty \widetilde{Y}) \geqslant \frac{1}{2}(p_1 q_1 - p_1 - q_1)$. □

2.10. **Uwaga.** Powyższy dowód można zaadoptować do przypadku krzywych nad dowolnym ciałem. Trzeba tylko założyć, że charakterystyka ciała nie dzieli jednego ze stopni $p$ lub $q$ (jak w [AM]). Po szczegóły odsyłamy czytelnika do [Zol].

Na zakończenie chcielibyśmy zwrócić uwagę na prace [BZ1], [BZ2], [BZ3], w których zastosowaliśmy metodę Poincarégo–Hopfa do klasyfikacji afinicznych krzywych wymiernych $C_0$ z $\chi(C_0) = 0$. Ale o tym napiszemy przy innej okazji.

## Literatura


[AM] S. S. Abhyankar and T. T. Moh, *Embeddings of the line in the plane*, J. reine angew. Math. **276** (1975), 148–166.

[BZ1] M. Borodzik, H. Żołądek, *Complex algebraic plane curves via Poincaré–Hopf formula. I. Parametric lines,* Pacific J. Math. (w druku).

[BZ2] M. Borodzik and H. Żołądek, *Complex algebraic plane curves via Poincaré–Hopf formula. II. Annuli*, Preprint, University of Warsaw, 2005.

[BZ3] M. Borodzik and H. Żołądek, *Complex algebraic plane curves via Poincaré–Hopf formula. III. Codimension bounds*, (w przygotowaniu).

[KM1] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *Gauge theory for embedded surfaces*, Topology **32** (1993), 773–826.

[KM2] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Letters **1** (1994), 797–808.

[Lins] A. Lins-Neto, *Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two*, in: 'Holomorphic Dynamics, Mexico 1986, Lect. Notes in Math, **1345**, Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1988, pp. 193–232.

[Mil] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals Math. Studies **61**, Princeton Un-ty Press, Princeton, 1968.

[Plo] A. Płoski, *The Milnor number of a plane algebroid curve*, w: "Materiały XVI Konferencji Szkoleniowej z Analizy i Geometrii Zespolonej", Łódź, 1995, str. 73–82.

[Ru1] L. Rudolph, *Some knot theory of complex affine curves*, L'Enseign. Math. **29** (1983), 185–208; [new version: arXiv:math.GT/0106058 v1 8 Jun 2001].

[Ru2] L. Rudolph, *Quasipositivity as an obstruction to sliceness*, Bull. Amer. Math. Soc. **29** (1993), 51–59.

[Ser] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris, 1959.

[Suz] M. Suzuki, *Affine curves with one place at infinity*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999), 375–404.

[Zol] H. Żołądek, *A new topological proof of the Abhyankar–Moh theorem*, Math. Z. **244** (2003), 689–695.


## Algebraic curves and the Poincaré–Hopf formula


**Summary.** Using the Poincaré–Hopf formula to a Hamiltonian vector field associated with an algebraic curve, we calculate invariants of the singularities of this curve. As an application we present a proof of the Abhyankar–Moh–Suzuki theorem.


*Łódź, 9 – 13 stycznia 2006 r.*