Liczby Lefschetza a orbity asymptotycznie okresowe

Łódź 6-10 stycznia 2020

Karol Gryszka

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

(X, d) - przestrzeń metryczna.
G - grupa o "rozsądnych" własnościach (u nas zawsze $\mathbb{Z}$ lub $\mathbb{R}$).
$\phi : G \times X \to X$ - układ dynamiczny.
$\phi_t : X \to X, \phi_t(x) := \phi(t, x)$ - odwzorowanie po czasie t.
$o(x)$ - orbita punktu x.
$\omega(x)$ - zbiór omega-graniczny punktu x ($y \in \omega(x)$ gdy istnieje $t_n \to +\infty$ taki, że $\phi(t_n, x) \to y$; wtedy również $o(x) \cup \omega(x) = \overline{o(x)}$).

Punkt x jest T-*okresowy* dla pewnego $T > 0$, jeżeli $\phi(T, x) = x$ oraz x nie jest punktem stacjonarnym.

Konwencja: $\phi(t, x) = x.t$ (wiadomo, jak wygląda ϕ).

Przestrzeń metryczna (X, d) jest właściwa, gdy wszystkie wszystkie kule domknięte w niej są zwarte.

Przygotowanie techniczne

Ustalmy $x \in X$ oraz $\varepsilon > 0$, zdefiniujmy

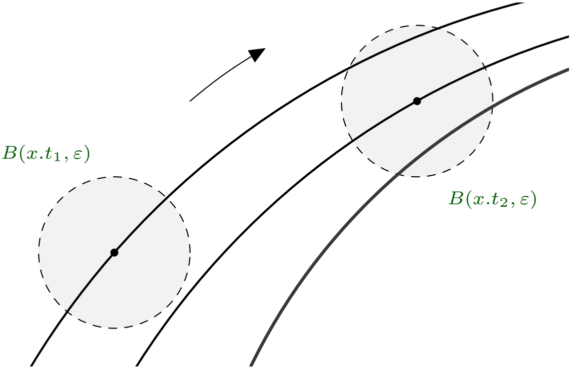
$$A(x, \varepsilon) := \{t \geqslant 0 \mid d(x.t, x) > \varepsilon\}.$$

Zdefiniujmy

$$w_{x,\varepsilon}(t) := \begin{cases} 0, & t \notin A(x, \varepsilon), \\ r_i - q_i, & t \in (q_i, r_i). \end{cases}$$

Zbiór $W_{x,\varepsilon} := \{w_{x,\varepsilon}(t)\}_{t \geqslant 0}$ zawiera co najwyżej przeliczalnie wiele różnych, nieujemnych liczb rzeczywistych lub całkowitych oraz $+\infty$, gdy jest to konieczne. Niech

$$W(x, \varepsilon) := \limsup_{t \to +\infty} w_{x,\varepsilon}(t).$$



Rysunek 1: Szkic do definicji

Orbita asymptotycznie okresowa

Okresem asymptoycznym punktu x nazywamy wielkość

$$\mathrm{AP}(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{s \to +\infty} W(x.s, \varepsilon).$$

Ta granica jest albo nieujemną liczbą, albo jest nieskończona. Jeżeli $\mathrm{AP}(x) = 0$, to x nazywamy *asymptotycznie stacjonarnym*. Jeżeli x ma skończony okres asymptotyczny, wtedy nazywamy go *asymptotycznie okresowym*. Jeżeli $\mathrm{AP}(x) = +\infty$, to x nazywamy *asymptotycznie nieokresowym*.

Orbita asymptotycznie okresowa

Okresem asymptoycznym punktu x nazywamy wielkość

$$\mathrm{AP}(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{s \to +\infty} W(x.s, \varepsilon).$$

Ta granica jest albo nieujemną liczbą, albo jest nieskończona. Jeżeli $\mathrm{AP}(x) = 0$, to x nazywamy *asymptotycznie stacjonarnym*. Jeżeli x ma skończony okres asymptotyczny, wtedy nazywamy go *asymptotycznie okresowym*. Jeżeli $\mathrm{AP}(x) = +\infty$, to x nazywamy *asymptotycznie nieokresowym*.

Intuicja: okres asymptotyczny mierzy, jak długo asymptotycznie orbita jest poza pewnym malejącym otoczeniem danego punktu, który przesuwamy powoli wzdłuż orbity.

Komentarz:

Istnieją inne koncepcje pojęcia ”okres asymptotyczny”, na przykład:
Punkt x jest asymptotycznie T-okresowy, gdy istnieje y-punkt T-okresowy i taki, że $d(x.t, y.t) \to 0$ gdy $t \to +\infty$.
Powyższa własność jest silniejsza od poprzedniej, to jest jeśli punkt jest asymptotycznie okresowy w powyższym sensie, to jest asymptotycznie okresowy w sensie wcześniej wprowadzonym.

Twierdzenie 1 (G.)

1. Jeżeli $\mathrm{AP}(x) = 0$, to $\omega(x)$ jest co najwyżej singletonem.
2. Jeżeli (X, d) jest właściwą przestrzenią metryczną, to x jest asymptotycznie stały wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega(x)$ jest punktem stałym ($\omega(x) = \{y\}$ oraz $y.t = y$ dla wszystkich $t \in G$). Założenie właściwości przestrzeni jest istotne.

Twierdzenie 2 (G.)

Niech X będzie właściwą przestrzenią metryczną i $x \in X$.

1. Jeżeli $\omega(x)$ jest co najmniej dwuelementowy i zawiera punkt stały, to $\mathrm{AP}(x) = +\infty$.
2. Jeżeli $\omega(x)$ zawiera dwie różne orbity o dodatniej odległości między nimi, to $\mathrm{AP}(x) = +\infty$.
3. Jeżeli X jest zwarta oraz $\mathrm{AP}(x) = +\infty$, to $\omega(x)$ może być orbitą gęstą w $\omega(x)$, sumą rozłącznych orbit okresowych lub punktów stałych.

Definicja (odwzorowania homotopijne)

Niech $f\colon X \to X$ oraz $g\colon X \to X$ będą odwzorowaniami ciągłymi. Powiemy, że f jest homotopijne z g, co będziemy zapisywać przez $f \simeq g$, gdy istnieje taka ciągła funkcja $H\colon [0,1] \times X \to X$, że $H(0,x) = f(x)$ oraz $H(1,x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in X$.

Definicja (odwzorowania homotopijne)

Niech $f\colon X \to X$ oraz $g\colon X \to X$ będą odwzorowaniami ciągłymi. Powiemy, że f jest homotopijne z g, co będziemy zapisywać przez $f \simeq g$, gdy istnieje taka ciągła funkcja $H\colon [0,1] \times X \to X$, że $H(0,x) = f(x)$ oraz $H(1,x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in X$.

Definicja (słaba własność punktu stałego)

Przestrzeń topologiczna X ma *słabą własność punktu stałego*, gdy dla dowolnego odwzorowania $f\colon X \to X$ takiego, że $f \simeq Id_X$, f ma punkt stały (istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) = x$).

Definicja (odwzorowania homotopijne)

Niech $f\colon X \to X$ oraz $g\colon X \to X$ będą odwzorowaniami ciągłymi. Powiemy, że f jest homotopijne z g, co będziemy zapisywać przez $f \simeq g$, gdy istnieje taka ciągła funkcja $H\colon [0,1] \times X \to X$, że $H(0,x) = f(x)$ oraz $H(1,x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in X$.

Definicja (słaba własność punktu stałego)

Przestrzeń topologiczna X ma *słabą własność punktu stałego*, gdy dla dowolnego odwzorowania $f\colon X \to X$ takiego, że $f \simeq Id_X$, f ma punkt stały (istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) = x$).

Definicja (ENR)

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Przestrzeń X nazywamy *euklidesowym retraktem otoczeniowym* (w skrócie: *ENR–em*), jeżeli istnieje zbiór otwarty V w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz funkcje $r\colon V \to X$ i $s\colon X \to V$, dla których $r \circ s = \mathrm{Id}_X$.

Definicja (odwzorowania homotopijne)

Niech $f\colon X \to X$ oraz $g\colon X \to X$ będą odwzorowaniami ciągłymi. Powiemy, że f jest homotopijne z g, co będziemy zapisywać przez $f \simeq g$, gdy istnieje taka ciągła funkcja $H\colon [0,1] \times X \to X$, że $H(0,x) = f(x)$ oraz $H(1,x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in X$.

Definicja (słaba własność punktu stałego)

Przestrzeń topologiczna X ma *słabą własność punktu stałego*, gdy dla dowolnego odwzorowania $f\colon X \to X$ takiego, że $f \simeq Id_X$, f ma punkt stały (istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) = x$).

Definicja (ENR)

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Przestrzeń X nazywamy *euklidesowym retraktem otoczeniowym* (w skrócie: *ENR–em*), jeżeli istnieje zbiór otwarty V w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ oraz funkcje $r\colon V \to X$ i $s\colon X \to V$, dla których $r \circ s = \mathrm{Id}_X$.

$X \subset V$ oraz s - inkluzja $\to$ klasyczna retrakcja

Intuicja za ENR-ami:

- jeśli $X \subset \mathbb{R}^n$ jest ENR-em, to $X = C \cap O$, gdzie C jest zbiorem domkniętym, a O jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$; w szczególności X jest lokalnie zwartym podzbiorem,
- jeśli $X \subset \mathbb{R}^n$ jest retraktem pewnego swojego otoczenia, to jest ENR-em.
- jeśli X jest ENR-rem oraz $f, g : Y \to X$ są takie, że $f(B) = g(B)$, to istnieje W otwarte otoczenie B w Y oraz homotopia H między $f|_W$ oraz $g|_W$ taka, że $H(B, t) = f(B) = g(B)$ dla wszystkich t.

Od tego momentu układy dynamiczne są nad $\mathbb{R}$.

Ważny Lemat

Niech X będzie zwartym ENR-em ze słabą własnością punktu stałego oraz niech ϕ będzie układem dynamicznym na X. Wtedy ϕ ma punkt stały w X.

Od tego momentu układy dynamiczne są nad $\mathbb{R}$.

Ważny Lemat

Niech X będzie zwartym ENR-em ze słabą własnością punktu stałego oraz niech ϕ będzie układem dynamicznym na X. Wtedy ϕ ma punkt stały w X.

Z powyższego lematu wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Niech ϕ będzie układem dynamicznym na przestrzeni metrycznej (X, d). Wybierzmy $x \in X$ i załóżmy, że zbiór $\omega(x) = S$ jest zwartym ENR–em mającym słabą własność punktu stałego. Jeżeli $\operatorname{card} S > 1$, to $\mathrm{AP}(x) = +\infty$.

Dowód.

Na mocy Lematu ϕ ma punkt stały w S. Teza wynika teraz z Twierdzenia 2. □

Twierdzenie 1 (G.)

1. Jeżeli $\mathrm{AP}(x) = 0$, to $\omega(x)$ jest co najwyżej singletonem.
2. Jeżeli (X, d) jest właściwą przestrzenią metryczną, to x jest asymptotycznie stały wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega(x)$ jest punktem stałym ($\omega(x) = \{y\}$ oraz $y.t = y$ dla wszystkich $t \in G$). Założenie właściwości przestrzeni jest istotne.

Twierdzenie 2 (G.)

Niech X będzie właściwą przestrzenią metryczną i $x \in X$.

1. Jeżeli $\omega(x)$ jest co najmniej dwuelementowy i zawiera punkt stały, to $\mathrm{AP}(x) = +\infty$.
2. Jeżeli $\omega(x)$ zawiera dwie różne orbity o dodatniej odległości między nimi, to $\mathrm{AP}(x) = +\infty$.
3. Jeżeli X jest zwarta oraz $\mathrm{AP}(x) = +\infty$, to $\omega(x)$ może być orbitą gęstą w $\omega(x)$, sumą rozłącznych orbit okresowych lub punktów stałych.

Kilka słów o homologiach...

Niech $e_0, \dots, e_n$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^{n+1}$ oraz $\Delta_n = \mathrm{conv}\{e_0, \dots, e_n\}$ będzie standardowym sympleksem.

Definicje

Dowolne odwzorowanie ciągłe $\sigma\colon \Delta_n \to X$, gdzie X jest ustaloną przestrzenią topologiczną, nazywamy *sympleksem singularnym*.
Niech $\Sigma_n(X) := \{\sigma\colon \Delta_n \to X - \text{ ciągłe}\}$. Zbiór n-wymiarowych *łancuchów singularnych* na X nad $\mathbb{Z}$ definiujemy jako

$$S_n(X) := \begin{cases} \bigoplus_{\Sigma_n(X)} \mathbb{Z}, & n \geqslant 0, \\ 0 & n < 0. \end{cases}$$

Dla $n \geqslant 1$ oraz $0 \leqslant j \leqslant n$ oznaczmy

$$\varepsilon^j : \Delta_{n-1} \ni (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \mapsto (\lambda_0, \dots, \lambda_{j-1}, 0, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n-1}) \in \Delta_n.$$

Jeśli $\sigma \in S_n(X)$, to $\partial_n \sigma := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sigma \circ \varepsilon^j$ nazywamy *operatorem brzegu*.

Uwaga: $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$.

$(S_n(X), \partial_n)$ - grupa (kompleks singularny, kompleks łańcuchowy).

Definicje

Definiujemy zbiór *cykli n–wymiarowowych*

$$Z_n(X) := \ker \partial_n$$

oraz zbiór *brzegów n–wymiarowych*

$$B_n(X) := \operatorname{Im} \partial_{n+1}.$$

N–tą grupą homologii singularnych $H_n(X)$ na przestrzeni X nazywamy grupę ilorazową $Z_n(X)/B_n(X)$.

Niech teraz $f\colon X \to Y$ będzie ciągłym odwzorowaniem między dwiema przestrzeniami topologicznymi. Wprowadzamy odwzorowanie $S_n(f)\colon S_n(X) \to S_n(Y)$ wzorem $S_n(f)(\sigma) := f \circ \sigma$. Ponieważ $\partial_n \circ S_n(f) = S_{n-1}(f) \circ \partial_n$, więc w szczególności ma sens oraz jest poprawna następująca definicja.

Definicja

Homomorfizm

$$H_n(f)\colon H_n(X) \ni [z] \mapsto [S_n(f)(z)] \in H_n(Y)$$

nazywamy *homomorfizem indukowanym* przez f w homologiach.

Intuicja:

- homologie singularne mierzą ilość n-wymiarowych dziur w danej przestrzeni topologicznej,
- jeśli X jest ściągalna, to wszystkie H_n poza $n = 0$ są trywialne i $H_0(X) = \mathbb{Z}$,
- jeśli zamiast $\mathbb{Z}$ w całej konstrukcji ustalimy $\mathbb{Q}$, konstrukcja również "przechodzi" i w efekcie generuje przestrzeń wektorową $H_n(X)$.

Niech X będzie zwartym ENR-em, a $f\colon X \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Niech H będzie funktorem homologii singularnych o współczynnikach w $\mathbb{Q}$. Niech $H(f)\colon H(X) \to H(X)$ będzie homomorfizmem indukowanym w homologiach.

Niech X będzie zwartym ENR-em, a $f\colon X \to X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Niech H będzie funktorem homologii singularnych o współczynnikach w $\mathbb{Q}$. Niech $H(f)\colon H(X) \to H(X)$ będzie homomorfizmem indukowanym w homologiach.

Definicja (liczba Lefschetza)

Wielkość

$$L(f) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \mathrm{tr} H_n(f) \in \mathbb{Z}$$

nazywamy *liczbą Lefschetza* odwzorowania f, gdzie $\mathrm{tr} H_n(f)$ jest śladem endomorfizmu $H_n(f)\colon H_n(X) \to H_n(X)$.

Definicja (charakterystyka Eulera)

Jeżeli $f = \mathrm{Id}_X$, to $\chi(X) := L(\mathrm{Id}_X)$ nazywamy *charakterystyką Eulera* przestrzeni X. Wtedy też

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dim H_n(X).$$

Powyższe definicje są poprawnie określone, gdyż wiadomo, że zwarte ENR-y mają tylko skończenie wiele niezerowych homologii $H_n(X)$ oraz wszystkie one są skończonego wymiaru. Odnotujmy również, że liczby Lefschetza są niezmiennikami przekształceń homotopijnych.

Twierdzenie Lefschetza o punkcie stałym - klasyka

Niech X będzie zwartym ENR-em oraz $f\colon X \to X$ będzie ciągłe. Jeżeli $L(f) \neq 0$, to f ma punkt stały.

Twierdzenie Lefschetza o punkcie stałym - klasyka

Niech X będzie zwartym ENR-em oraz $f\colon X \to X$ będzie ciągłe. Jeżeli $L(f) \neq 0$, to f ma punkt stały.

Proste zastosowanie twierdzenia Lefschetza o punkcie stałym przedstawia poniższy przykład.

Przykład

Charakterystyka Eulera dla sfer wyraża się następująco:

$$\chi(\mathbb{S}^{2k}) = 2, \qquad \chi(\mathbb{S}^{2k+1}) = 0.$$

W szczególności, z twierdzenia Lefschetza wynika, że sfery parzystego wymiaru mają słabą własność punktu stałego (liczby Lefschetza są niezmiennikami przekształceń homotopijnych!). Na podstawie Lematu wiemy więc, że układy dynamiczne na takich sferach muszą mieć punkt stacjonarny.

Twierdzenie (G.)

Niech ϕ będzie układem dynamicznym na X i $x \in X$. Niech $\omega(x) = S$ będzie zwartym ENR–em. Załóżmy dodatkowo, że $\operatorname{card} S > 1$. Jeżeli $\chi(S) \neq 0$, to $\mathrm{AP}(x) = +\infty$.

Twierdzenie (G.)

Niech ϕ będzie układem dynamicznym na X i $x \in X$. Niech $\omega(x) = S$ będzie zwartym ENR–em. Załóżmy dodatkowo, że $\operatorname{card} S > 1$. Jeżeli $\chi(S) \neq 0$, to $\operatorname{AP}(x) = +\infty$.

Dowód.

Dla dowolnego t zachodzi ciąg równości $\chi(S) = L(\mathrm{Id}_S) = L(\phi_t|_S)$, więc z twierdzenia Lefschetza wynika, że wszystkie $\phi_t|_S$ mają punkt stacjonarny. Wystarczy teraz zastosować Twierdzenie 2. □

Z powyższego Twierdzenia wynika w szczególności, że jeżeli pewien zbiór S jest granicznym zbiorem zwartym i minimalnym o niezerowej charakterystyce Eulera, to dowolny punkt, którego zbiorem granicznym jest S, jest asymptotycznie nieokresowy.

Z powyższego Twierdzenia wynika w szczególności, że jeżeli pewien zbiór S jest granicznym zbiorem zwartym i minimalnym o niezerowej charakterystyce Eulera, to dowolny punkt, którego zbiorem granicznym jest S, jest asymptotycznie nieokresowy.

Przykład

Jeżeli w Twierdzeniu przyjmiemy $S = \mathbb{S}^{2k}$, to $\mathrm{AP}(x) = +\infty$.
W szczególności wynika z tego, że sfera parzystego wymiaru nie może być zbiorem granicznym punktu asymptotycznie okresowego. Z kolei sfera $\mathbb{S}^1$ jest zbiorem granicznym punktu okresowego dla układu w $\mathbb{R}^2$, generowanego przez układ równań w biegunowym układzie współrzędnych

$$r' = 1, \qquad \vartheta' = 0$$

Przykład ten pokazuje, że założenie o niezerowości charakterystyki Eulera nie może zostać opuszczone.

Z powyższego Twierdzenia wynika w szczególności, że jeżeli pewien zbiór S jest granicznym zbiorem zwartym i minimalnym o niezerowej charakterystyce Eulera, to dowolny punkt, którego zbiorem granicznym jest S, jest asymptotycznie nieokresowy.

Przykład

Jeżeli w Twierdzeniu przyjmiemy $S = \mathbb{S}^{2k}$, to $\mathrm{AP}(x) = +\infty$.
W szczególności wynika z tego, że sfera parzystego wymiaru nie może być zbiorem granicznym punktu asymptotycznie okresowego. Z kolei sfera $\mathbb{S}^1$ jest zbiorem granicznym punktu okresowego dla układu w $\mathbb{R}^2$, generowanego przez układ równań w biegunowym układzie współrzędnych

$$r' = 1, \qquad \vartheta' = 0$$

Przykład ten pokazuje, że założenie o niezerowości charakterystyki Eulera nie może zostać opuszczone.

Uwaga!

Tezy Twierdzenia nie można odwrócić ($\chi(\mathbb{T}^2) = 0$).

N. P. Bhatia, G. P. Szegö, *Stability Theory of Dynamical Systems*, Springer–Verlang, Berling · Heidelberg · New York, 1970.

K. Gryszka, *Asymptotic Period in Dynamical Systems in Metric Spaces*, Colloq. Math. **139** (2015), 245–257.

K. Gryszka, *Lagrange Stability and Asymptotic Periods*, Topology Appl. **204** (2016), 168–174

K. Gryszka, *Trajektorie asymptotycznie okresowe w ciągłych układach dynamicznych*, praca doktorska (2016).