

Orbity konfiguracji symplecticznej $A(31,3)$ w kontekście problemu zawierania

Marek Janasz

(praca wspólna z G. Malarą)

Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie

Łódź, 10 I 2020

Problem zawierania $I^{(3)} \subset I^2$

Definicja Niech $I \subseteq S(n) = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ będzie ideałem jednorodnym, m -tą potęgę symboliczną ($m \geq 1$) ideału I nazywamy

$$I^{(m)} = \bigcap_{Q \in \text{Ass}(I)} (S(n) \cap I_Q^m),$$

gdzie $\text{Ass}(I)$ oznacza zbiór wszystkich ideałów stowarzyszonych pierwszych z I , a I_Q lokalizacje I w Q .

Rozkład prymarny I^m :

$$I^m = \bigcap_{P \in \text{Ass}(I^m)} Q_P,$$

Potęga symboliczna $I^{(m)}$

Rozkład prymarny I^m :

$$I^m = \bigcap_{P \in \text{Ass}(I^m)} Q_P,$$

$$I^{(m)} = \bigcap_{P \in S} Q_P,$$

gdzie S jest zbiorem tych ideałów pierwszych stowarzyszonych z I^m , które są stowarzyszone z I .

Potęga symboliczna $I^{(m)}$

Jeśli I jest ideałem radykalnym, jednorodnym, a ideały P_1, \dots, P_j są stowarzyszonymi z nim ideałami pierwszymi, wtedy

$$I = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_j \text{ oraz } I^{(m)} = \widetilde{P}_1^m \cap \widetilde{P}_2^m \cap \dots \cap \widetilde{P}_j^m,$$

gdzie \widetilde{P}_i^m jest najmniejszym pod względem inkluzji ideałem P_i - prymarnym zawierającym P_i^m .

Dla punktów $p_1, p_2, \dots, p_j \in \mathbb{P}^N$, mamy

$$I^{(m)} = I(p_1)^m \cap I(p_2)^m \cap \dots \cap I(p_j)^m.$$

Przykład

$$p_1 = (1 : 0 : 0), p_2 = (0 : 1 : 0), p_3 = (0 : 0 : 1) \text{ w } \mathbb{P}^2$$

Przykład

$p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$ w \mathbb{P}^2

$$I = I(p_1) \cap I(p_2) \cap I(p_3) = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z) = (xy, xz, yz)$$

Przykład

$p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$ w \mathbb{P}^2

$I = I(p_1) \cap I(p_2) \cap I(p_3) = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z) = (xy, xz, yz)$

$I^2 = (x^2y^2, x^2yz, xy^2z, x^2z^2, xyz^2, y^2z^2)$

Przykład

$p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$ w \mathbb{P}^2

$$I = I(p_1) \cap I(p_2) \cap I(p_3) = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z) = (xy, xz, yz)$$

$$I^2 = (x^2y^2, x^2yz, xy^2z, x^2z^2, xyz^2, y^2z^2)$$

Rozkład prymarny I^2 :

$$I^2 = (z^2, yz, y^2) \cap (z^2, xz, x^2) \cap (y^2, xy, x^2) \cap (x^2, y^2, z^2)$$

Przykład

$p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$ w \mathbb{P}^2

$$I = I(p_1) \cap I(p_2) \cap I(p_3) = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z) = (xy, xz, yz)$$

$$I^2 = (x^2y^2, x^2yz, xy^2z, x^2z^2, xyz^2, y^2z^2)$$

Rozkład prymarny I^2 :

$$I^2 = (z^2, yz, y^2) \cap (z^2, xz, x^2) \cap (y^2, xy, x^2) \cap (x^2, y^2, z^2)$$

Ideały stowarzyszone pierwsze: (x, y) , (x, z) , (y, z) , (x, y, z)

Przykład

$p_1 = (1 : 0 : 0)$, $p_2 = (0 : 1 : 0)$, $p_3 = (0 : 0 : 1)$ w \mathbb{P}^2

$$I = I(p_1) \cap I(p_2) \cap I(p_3) = (x, y) \cap (x, z) \cap (y, z) = (xy, xz, yz)$$

$$I^2 = (x^2y^2, x^2yz, xy^2z, x^2z^2, xyz^2, y^2z^2)$$

Rozkład prymarny I^2 :

$$I^2 = (z^2, yz, y^2) \cap (z^2, xz, x^2) \cap (y^2, xy, x^2) \cap (x^2, y^2, z^2)$$

Ideały stowarzyszone pierwsze: (x, y) , (x, z) , (y, z) , (x, y, z)

$$I^{(2)} = (z^2, yz, y^2) \cap (z^2, xz, x^2) \cap (y^2, xy, x^2) = (x, y)^2 \cap (x, z)^2 \cap (x, y)^2 = (xyz, x^2y^2, x^2z^2, y^2z^2)$$

Twierdzenie (Zariski-Nagata)

Niech $I \subseteq S(n)$ będzie ideałem radykalnym i niech V będzie jego zbiorem zer. Wtedy elementami $I^{(m)}$ są wszystkie wielomiany znikające do rzędu co najmniej m wzdłuż V .

Problem zawierania $I^{(3)} \subset I^2$

Geneza:

Bezpośrednio z definicji potęgi symbolicznej otrzymujemy

$$I = I^{(1)} \supseteq I^{(2)} \supseteq I^{(3)} \supseteq \dots$$

podobnie dla potęgi zwykłej

$$I = I^1 \supseteq I^2 \supseteq I^3 \supseteq \dots$$

Problem zawierania $I^{(3)} \subset I^2$

Problem zawierania

Dla jakich r i m zachodzą zawierania

a) $I^r \subseteq I^{(m)}$

b) $I^{(m)} \subseteq I^r?$

Problem zawierania $I^{(3)} \subset I^2$

Problem zawierania

Dla jakich r i m zachodzą zawierania

a) $I^r \subseteq I^{(m)} \iff m \leq r,$

b) $I^{(m)} \subseteq I^r?$

Problem zawierania $I^{(3)} \subset I^2$

Problem zawierania

Dla jakich r i m zachodzą zawierania

a) $I^r \subseteq I^{(m)} \iff m \leq r,$

b) $I^{(m)} \subseteq I^r$ prawdziwa gdy $m \geq nr$. [Ein-Lazarsfeld-Smith, 2001]

Problem zawierania $I^{(3)} \subseteq I^2$

Problem zawierania

Dla jakich r i m zachodzą zawierania

a) $I^r \subseteq I^{(m)} \iff m \leq r,$

b) $I^{(m)} \subseteq I^r$ prawdziwa gdy $m \geq nr$. [Ein-Lazarsfeld-Smith, 2001]

B. Harbourne, C. Huneke, *Are symbolic powers highly evolved?* (2013)

Hipoteza: Niech $I \subseteq S(n)$ będzie ideałem jednorodnym. Wówczas dla dowolnego r inkluzja

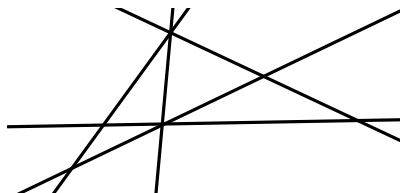
$$I^{(m)} \subseteq I^r$$

jest prawdziwa, jeśli $m \geq nr - (n - 1)$.

Konfiguracja prostych

Definicja

Konfiguracją prostych nazywamy zbiór prostych.



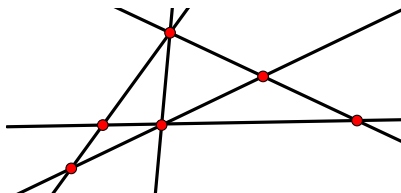
Konfiguracja prostych

Definicja

Konfiguracją prostych nazywamy zbiór prostych.

Definicja

Punktem osobliwym konfiguracji prostych nazywamy punkt, przez który przechodzą przynajmniej 2 proste.



Konfiguracja prostych

Definicja

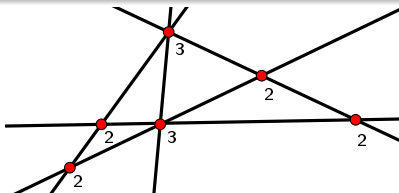
Konfiguracją prostych nazywamy zbiór prostych.

Definicja

Punktem osobliwym konfiguracji prostych nazywamy punkt, przez który przechodzą przynajmniej 2 proste.

Definicja

Krotnością punktu osobliwego nazywamy liczbę prostych przechodzących przez ten punkt.

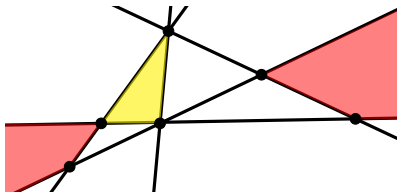


$$t = (t_2, t_3) \quad t = (4, 2)$$

Konfiguracja prostych

Definicja

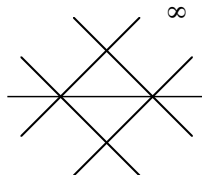
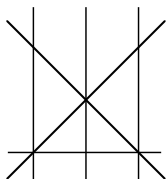
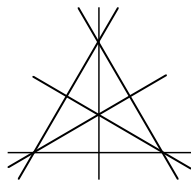
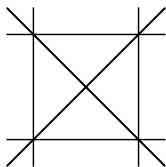
Wnętrze zbioru wypukłego ograniczonego przez proste nazywamy ścianą konfiguracji prostych.



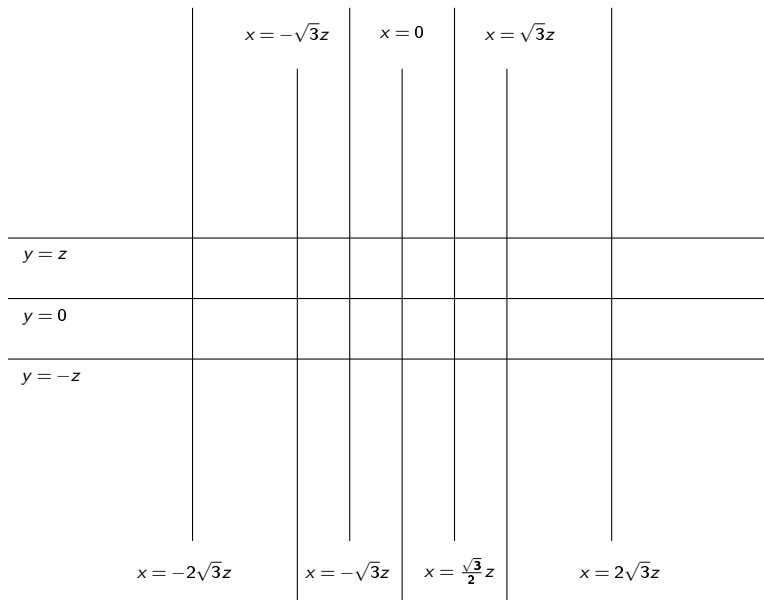
Konfiguracje symplecjalne

Definicja

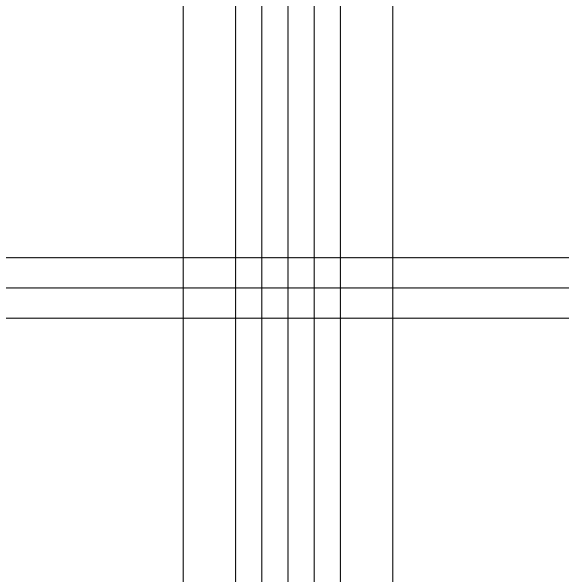
Mówimy, że rzeczywista konfiguracja jest symplecjalna, jeżeli każda ściana jest trójkątem.



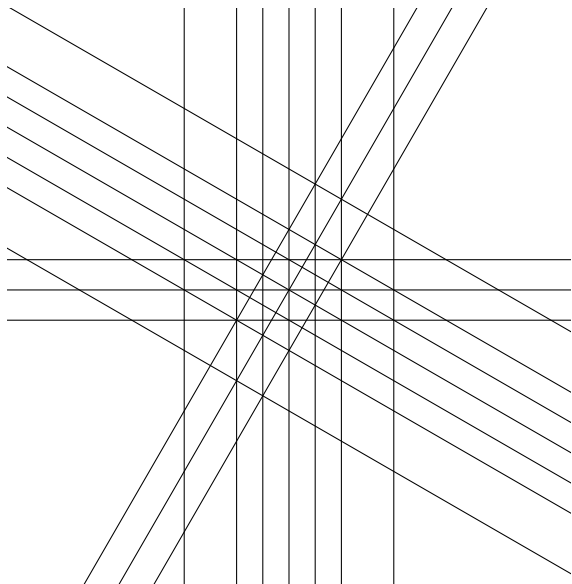
Konstrukcja $A(31,3)$



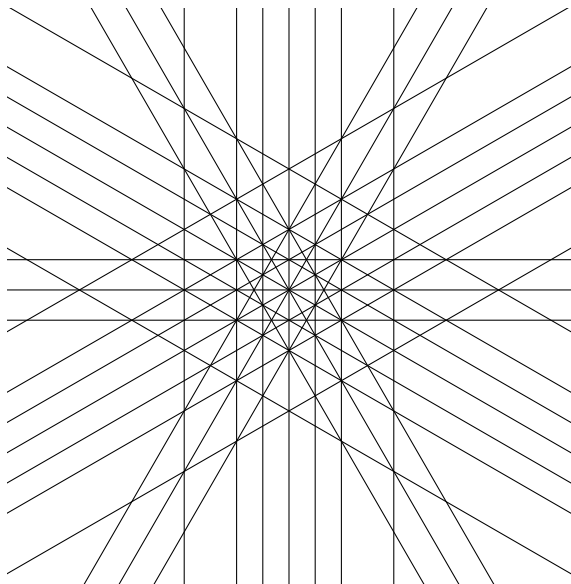
$A(31,3)$. Obrót o kąt 60° i 120° wokół punktu $(0 : 0 : 1)$



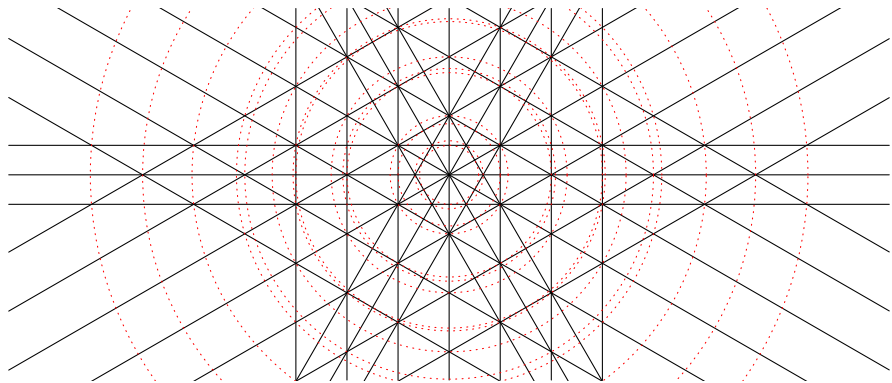
$A(31,3)$. Obrót o kąt 60° i 120° wokół punktu $(0 : 0 : 1)$



$A(31,3)$. Obrót o kąt 60° i 120° wokół punktu $(0 : 0 : 1)$



G-orbity



$A(31, 3)$

G-orbity. Tabela 1

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

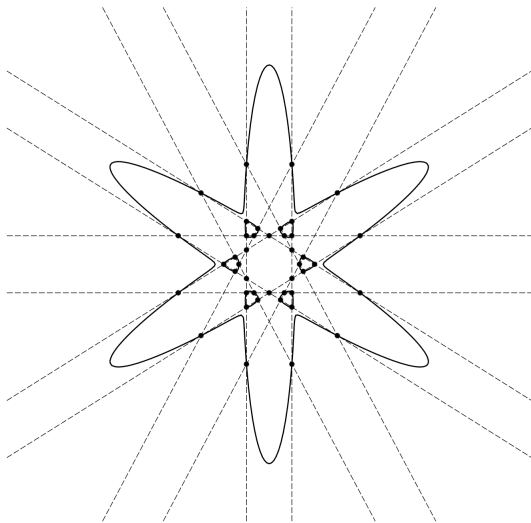
numer orbity	długość orbity	punkty
1	6	$(e : 3 : -3), (e : -3 : 3), (-2e : 0 : 3),$ $(2e : 0 : 3), (e : -3 : -3), (e : 3 : 3)$
2	6	$(e : -2 : 2), (e : 1 : 2), (0 : -1 : 1),$ $(0 : 1 : 1), (e : 1 : -2), (e : -1 : -2)$
3	12	$(e : 5 : 4), (-3e : 1 : 4), (3e : -1 : 4),$ $(e : 5 : -4), (3e : 1 : -4), (e : -5 : 4),$ $(e : -5 : -4), (3e : 1 : 4), (e : -2 : 2),$ $(e : 2 : 2), (e : 2 : -2), (e : -2 : -2)$
4	6	$(e : 0 : 1), (e : -3 : 2), (e : 3 : 2),$ $(e : 3 : -2), (e : -3 : -2), (e : 0 : -1)$
5	12	$(3e : 5 : -2), (3e : -5 : 2), (3e : -5 : -2),$ $(3e : 5 : 2), (2e : -1 : 1), (2e : 1 : 1),$ $(e : -7 : 2), (e : 7 : 2), (e : -7 : -2),$ $(e : 7 : -2), (-2e : -1 : 1), (-2e : 1 : 1)$
6	6	$(1 : -e : 0), (3 : e : 0), (1 : e : 0),$ $(3 : -e : 0), (1 : 0 : 0), (0 : e : 0)$

Twierdzenie

Istnieje ideał I definiowany jako przecięcie

$$I = \bigcap_{P_i \in \mathcal{P}} I(P_i),$$

ideałów 48 punktów (Tabela 1) dla którego zachodzi $I^{(3)} \not\subseteq I^2$. Ponadto, istnieje element $F \in I^{(3)} \setminus I^2$ składający się z 13 prostych oraz nierozkładalnej krzywej stopnia 6.



Element F ideału $I^{(3)}$ nie należący do drugiej potęgi zwykłej I^2 ($z = 1$).

- Analiza konfiguracji punktów pochodzących z konfiguracji prostych o maksymalnej liczbie punktów krotnościach 3 - Konfiguracja dualna Hessego (Dumnicki, Szemberg, Tutaj-Gasińska, 2013)

- Analiza konfiguracji punktów pochodzących z konfiguracji prostych o maksymalnej liczbie punktów krotnościach 3 - Konfiguracja dualna Hessego (Dumnicki, Szemberg, Tutaj-Gasińska, 2013)
- Badanie konfiguracji punktów o możliwie największym stosunku liczby punktów krotności 3 do liczby punktów o krotności 2

- Analiza konfiguracji punktów pochodzących z konfiguracji prostych o maksymalnej liczbie punktów krotnościach 3 - Konfiguracja dualna Hessego (Dumnicki, Szemberg, Tutaj-Gasińska, 2013)
- Badanie konfiguracji punktów o możliwie największym stosunku liczby punktów krotności 3 do liczby punktów o krotności 2
- Analiza „stabej” kombinatoryki układów prostych (Farnik, Kabat, Lampa-Baczyńska, Tutaj-Gasińska, 2018)

- Analiza konfiguracji punktów pochodzących z konfiguracji prostych o maksymalnej liczbie punktów krotnościach 3 – Konfiguracja dualna Hessego (Dumnicki, Szemberg, Tutaj-Gasińska, 2013)
- Badanie konfiguracji punktów o możliwie największym stosunku liczby punktów krotności 3 do liczby punktów o krotności 2
- Analiza „stabej” kombinatoryki układów prostych (Farnik, Kabat, Lampa-Baczyńska, Tutaj-Gasińska, 2018)
- Badanie konfiguracji punktów, pochodzących z konfiguracji prostych w szczególnym położeniu względem siebie.
Poszukiwanie elementów z $I^{(3)} \setminus I^2$ składających się z iloczynu prostych i krzywej nierozkładalnej stopnia wyższego niż 2.
(Pokora, Roé, 2018), (Janasz, Lampa-Baczyńska, Malara, 2018)

- Nowy kierunek badań odnoszący się do szczególnego położenia punktów, a nie ich krotności w konfiguracjach prostych

- Nowy kierunek badań odnoszący się do szczególnego położenia punktów, a nie ich krotności w konfiguracjach prostych
- Konfiguracja 48 punktów w szczególnym położeniu skupionych na orbitach konfiguracji $A(31, 3)$

Uwagi końcowe

- Nowy kierunek badań odnoszący się do szczególnego położenia punktów, a nie ich krotności w konfiguracjach prostych
- Konfiguracja 48 punktów w szczególnym położeniu skupionych na orbitach konfiguracji $A(31, 3)$
- Element z $I^{(3)} \setminus I^2$ składa się z 13 prostych i krzywej nierozkładalnej stopnia 6-ego.

Literatura:

- Ein, L., Lazarsfeld, R., Smith, K.E.: Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties, *Invent. Math.* 144 (2001), 241–252.
- Grünbaum B.: A catalogue of simplicial arrangements in the real projective plane, *ARS Mathematica Contemporanea* 2: 1–25 (2009).
- Harbourne, B., Craig Huneke, C.: Are symbolic powers highly evolved?, <https://arxiv.org/abs/1103.5809>
- Huneke, C.: Open problems on powers of ideals. Notes from a workshop on Integral Closure, Multiplier Ideals and Cores, AIM, (2006). www.aimath.org/WWN/integralclosure/Huneke.pdf
- Janasz, M., Malara, G., Lampa-Baczyńska, M.: New phenomena in the containment problem for simplicial arrangements. <https://arxiv.org/abs/1812.04382>
- Janasz, M., Malara, G.: A non-containment example on lines and a smooth curve of genus 10, *Analytic and Algebraic Geometry* 3, (2019).

Dziękuję za uwagę