MATERIAŁY NA XXXV KONFERENCJĘ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ

2014 **Łódź** **str. 25**

O JAKOBIANOWYM WIELOKĄCIE NEWTONA I MAKSYMALNYM KONTAKCIE

Andrzej Lenarcik (Kielce)

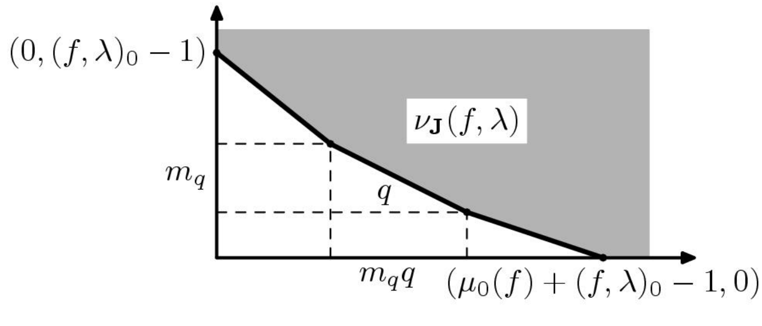
Kiełek zespolonej krzywej płaskiej z osobliwością izolowaną oraz kiełek gładki determinują tzw. jakobianowy wielokąt Newtona, który jest wariantem pojęcia wprowadzonego przez B. Teissier'a. Anonsujemy dwa rezultaty dotyczące oceny względnego położenia kiełka osobliwego i kiełka gładkiego na podstawie kształtu jakobianowego wielokąta Newtona. Możemy rozpoznać transwersalność (styczność) oraz maksymalny kontakt Hironaki.

*

Niech $f, \lambda \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ będą niezerowymi szeregami bez stałego wyrazu definiującymi kiełki $f = 0$ i $\lambda = 0$ w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^2$. Zakładamy, że $f = 0$ ma osobliwość izolowaną w zerze, zaś gładki kiełek $\lambda = 0$ (szereg λ jest nieosobliwy) nie jest gałęzią f. Zdefiniujmy jakobianowy wielokąt Newtona pary f, λ. Niech $\mathbf{J}(f, \lambda) = g_1 \dots g_u$ będzie rozkładem jakobianu $J(\lambda, f) = (\partial\lambda/\partial X)(\partial f/\partial Y) - (\partial\lambda/\partial Y)(\partial f/\partial X)$ na czynniki nierozkładalne w $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Definiujemy zbiór ilorazów polarnych

$$Q(f, \lambda) = \left\{ \frac{(f, g_j)_0}{(\lambda, g_j)_0} : j = 1, \dots, u \right\},$$

gdzie $(\ ,\ )_0$ jest krotnością przecięcia. Każdemu $q \in Q(f, \lambda)$ odpowiada zbiór indeksów J_q złożony z $j \in \{1, \dots, u\}$, dla których $(f, g_j)_0/(\lambda, g_j)_0 = q$. Wówczas $m_q = \sum_{j \in J_q} (\lambda, g_j)_0$ jest krotnością ilorazu polarnego q. Mamy $\sum m_q = (f, \lambda)_0 - 1$ oraz $\sum m_q q = \mu_0(f) + (f, \lambda)_0 - 1$, gdzie $\mu_0(f)$ jest liczbą Milnora. Informację o ilorazach polarnych i ich krotnościach przedstawiamy za Teissier'em w postaci jakobianowego wielokąta Newtona



$\nu_{\mathbf{J}}(f,\lambda)$. Jest to zbiór wypukły w pierwszej ćwiartce oddzielony od początku układu łamaną łączącą punkt na osi pionowej o rzędnej $(f,\lambda)_0-1$ z punktem na osi poziomej o odciętej $\mu_0(f)+(f,\lambda)_0-1$. Parami nierównoległym odcinkom łamanej odpowiadają różne ilorazy polarne. Długości rzutów odcinka skojarzonego z $q\in Q(f,\lambda)$ na oś poziomą i pionową wynoszą odpowiednio $m_q q$ oraz m_q.

Teissier rozważał generyczny jakobianowy wielokąt Newtona (w bardziej ogólnej sytuacji n wymiarowej). Dla $n=2$ z tych rozważań wynika, że wielokąt $\nu_{\mathbf{J}}(f,\lambda)$ nie zależy od $\lambda=bX-aY$ dla wystarczająco ogólnych $(a:b)\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Ten generyczny wielokąt oznaczamy $\nu_{\mathbf{J}}(f)$. Poniższe twierdzenie wyjaśnia kwestię równości $\nu_{\mathbf{J}}(f,\lambda)=\nu_{\mathbf{J}}(f)$.

Twierdzenie 1.1. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) $f=0$ *i* $\lambda=0$ *są transwersalne,*
(ii) $\nu_{\mathbf{J}}(f,\lambda)=\nu_{\mathbf{J}}(f)$,
(iii) $(f,\lambda)_0\le\min Q(f,\lambda)$.

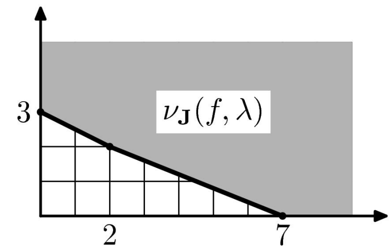
Z Twierdzenia 1.1 wynika, że możemy rozpoznawać generyczność jakobianowego wielokąta Newtona na podstawie jego kształtu. Kolejny rezultat dotyczy tzw. maksymalnego kontaktu Hironaki. Zdefiniujemy go za pomocą rzędu kontaktu $d(f,g):=(f,g)_0/((\operatorname{ord} f)(\operatorname{ord} g))$ szeregów nierozkładalnych (gałęzi) $f,g\in\mathbb{C}\{X,Y\}$ [Pł1]. Dla szeregu zredukowanego $f=f_1\dots f_r$ ($f_1,\dots,f_r$ gałęzie, $r=r(f)$ liczba gałęzi) oraz dla nieosobliwego λ kładziemy $d(f,\lambda)=\min_{i=1}^r d(f_i,\lambda)$ oraz $d(f)=\sup_\lambda d(f,\lambda)$ gdzie λ przebiega gałęzie gładkie. Mówimy, że λ jest w maksymalnym kontakcie z f, gdy $d(f,\lambda)=d(f)$. Oczywiście f jest w kontakcie maksymalnym z każdą swoją gałęzią gładką.

Twierdzenie 1.2. *Kiełki* $f=0$ *i* $\lambda=0$ *są w kontakcie maksymalnym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$1\le\frac{(f,\lambda)_0}{q_{\min}}\le m(q_{\min})\ ,$$

gdzie $q_{\min}=\min Q(f,\lambda)$ *jest minimalnym ilorazem polarnym, zaś* $m(q_{\min})$ *jego krotnością.*

Przykład 1.3. Rozważmy parę f, λ o danym jakobianowym wielokącie Newtona.



Mamy $(f,\lambda)_0 = 4$, $q_{\min} = \min Q(f,\lambda) = 2$ oraz $m(q_{\min}) = 1$. Ponieważ $4 = (f,\lambda)_0 > \min Q(f,\lambda) = 2$, więc z Twierdzenia 1.1 kiełki $f = 0$ i $\lambda = 0$ są styczne. Z kolei $(f,\lambda)_0/q_{\min} = 2$, więc z Twierdzenia 1.2 $f = 0$ i $\lambda = 0$ nie są w maksymalnym kontakcie. Opisany wyżej jakobianowy wielokąt Newtona uzyskamy np. dla $f = X^2 + Y^5$ i $\lambda = X + Y^2$.

Obszerna literatura na temat jakobianowego wielokąta Newtona podana jest w [GLP]. Informacje na temat maksymalnego kontaktu można znaleźć w [Pł2].

Literatura

[GLP] J. Gwoździewicz, A. Lenarcik, A. Płoski, *Polar invariants of plane curve singularities: intersection theoretical approach*, Demonstratio Math. 43(2), (2010) 303–323.

[Pł1] A. Płoski, *Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 33(11-12), (1985) 601–605.

[Pł2] A. Płoski, *O kontakcie maksymalnym*, Materiały XXV Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź 2004, 19–25.

ON THE JACOBIAN NEWTON POLYGON AND THE MAXIMAL CONTACT

Summary. A germ of a plane curve complex isolated singularity and a smooth germ determine the jacobian Newton polygon which is a version of the notion introduced by B. Teissier for hypersurfaces. We present two results concerning the description of relative position of the germs in terms of the jacobian Newton polygon. The transversality (tangency) and the maximal contact of Hironaka is taken under consideration.

Department of Mathematics
Kielce University of Technology
AL. 1000 L PP 7
25-314 Kielce, Poland
e-mail: ztpal@tu.kielce.pl

Łódź, 6 – 10 stycznia 2014 r.