MATERIAŁY NA XXXV KONFERENCJĘ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ

2014 **Łódź** **str. 29**

UWAGI O CIĄGU SKOKÓW LICZB MILNORA

Maria Michalska i Justyna Walewska (Łódź)

1. Wstęp

Rozważać będziemy izolowaną osobliwość niezdegenerowaną dwóch zmiennych

$$f = \sum_{m\alpha + l\beta \geqslant lm} a_{\alpha\beta}\, x^\alpha y^\beta \tag{1}$$

taką, że $a_{l0}a_{0m} \neq 0$ oraz $l, m > 2$. Przedstawimy początkowe wyrazy ciągu liczb Milnora niezdegenerowanych deformacji f takich, że skok liczb Milnora jest minimalny. Przyjmując oznaczenia z Sekcji 2 poniżej w szczególności pokażemy, że

Twierdzenie 1.1. *Dla osobliwości postaci* (1) *połóżmy* $d = \mathrm{NWD}(l, m)$. *Ciąg niezdegenerowanych skoków liczb Milnora rozpoczyna się od*

$$\lambda_1^{\mathrm{nd}}, \underbrace{1, \ \ldots \ , \ 1}_{\max(1, d-1)}.$$

Prezentowane wyniki są rozszerzeniem wyników [1], [2] oraz [3].

2. Preliminaria

Funkcję analityczną $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}$ nazywamy *osobliwością izolowaną*, jeśli układ $\nabla f(x, y) = f(x, y) = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i jest ono równe 0.

Liczba Milnora osobliwości f to krotność ∇f w zerze i oznaczmy ją $\mu(f)$. *Deformacją osobliwości* izolowanej $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}$ nazwiemy funkcję analityczną $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ taką, że $F(0, \cdot) = f$ oraz $F(t, \cdot)$ jest osobliwością izolowaną dla dostatecznie małych t. *Deformacją niezdegenerowaną osobliwości* izolowanej nazwiemy funkcję F spełniającą powyższe warunki taką, że dodatkowo $F(t, \cdot)$ jest niezdegenerowana (w sensie Kouchnirenki, zob. [4]).

Wszystkie liczby Milnora deformacji osobliwości izolowanej f można zapisać jako ściśle malejący ciąg $(\mu_0, \ldots, \mu_l)$, gdzie $\mu_0 = \mu(f)$. Jest on jednoznacznie określony przez ciąg *najlepszych skoków* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, gdzie $\lambda_k = \mu_{k-1} - \mu_k$ dla $k = 1, \ldots, l$. Ponadto wszystkie liczby Milnora deformacji niezdegenerowanych również można zapisać jako ściśle malejący ciąg $(\mu_0^{\mathrm{nd}}, \ldots, \mu_m^{\mathrm{nd}})$ i związać z nim ciąg *najlepszych niezdegenerowanych skoków* $(\lambda_1^{\mathrm{nd}}, \ldots, \lambda_m^{\mathrm{nd}})$, gdzie $\lambda_k^{\mathrm{nd}} = \mu_{k-1}^{\mathrm{nd}} - \mu_k^{\mathrm{nd}}$ dla $k = 1, \ldots, m$. Ciągi te mogą być różne, zob. [4] i [5].

Diagramem Newtona zbioru punktów $\mathcal{S}$ na płaszczyźnie nazywać będziemy otoczkę wypukłą zbioru

$$\bigcup_{P \in \mathcal{S}} \left(P + \mathbb{R}_+^2\right).$$

Diagramem Newtona funkcji analitycznej $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}$ dwóch zmiennych w otoczeniu 0 będziemy nazywać diagram Newtona zbioru $\mathrm{supp} f$. *Brzegiem diagramu Newtona funkcji* (jak również skończonego zbioru punktów) jest łamana złożona ze skończonej ilości odcinków oraz dwóch półprostych. Bez zmniejszania ogólności diagram Newtona będziemy utożsamiali z tą skończoną rodziną odcinków, gdyż wyznaczają one diagram Newtona w sposób jednoznaczny. Co więcej, diagram Newtona będziemy utożsamiali z dowolną ustaloną niezdegenerowaną osobliwością o danym diagramie.

W dalszej części pracy rozważać będziemy diagramy Newtona Γ, które mają punkty wspólne z obiema osiami. Wówczas *liczbę Newtona* $\upsilon(\Gamma)$ definiuje się następująco

$$\upsilon(\Gamma) = 2A - p - q + 1, \tag{2}$$

gdzie A to pole powierzchni wielokąta ograniczonego brzegiem diagramu i osiami współrzędnych, $(p, 0)$ to współrzędne punktu przecięcia diagramu z osią x, zaś $(0, q)$ to współrzędne punktu przecięcia diagramu z osią y.

Kouchnirenko w [4] udowodnił, że liczba Newtona równa jest liczbie Milnora dla osobliwości niezdegenerowanej. Zatem przydać może się wzór Picka.

Fakt 2.1 (Wzór Picka). *Jeśli wielokąt na płaszczyźnie ma wierzchołki w punktach kraty $\mathbb{Z}^2$, to jego pole wyraża się wzorem*

$$\frac{B}{2} + W - 1,$$

gdzie B to ilość punktów kraty leżących na brzegu, zaś W to ilość punktów kraty leżących wewnątrz wielokąta.

Wprowadźmy użyteczne oznaczenia. Niech $\triangle(P, Q)$ oznacza odcinek PQ. Jeśli $P = (p, 0)$, $Q = (0, q)$ to dowolne przesunięcie $\triangle(P, Q)$ oznaczamy przez $\triangle(p, q)$ czyli $\triangle(p, q)$ jest przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o podstawie długości p i wysokości q. Ponadto dla $\triangle(p_1, q_1), \ldots, \triangle(p_n, q_n)$ oznaczmy przez

$$(-1)^k \left(\triangle(p_1, q_1) + \cdots + \triangle(p_n, q_n)\right)$$

dowolne przesunięcie łamanej będącej sumą odcinków o końcach kolejno w punktach

$$P,\ P + (-1)^k [p_1, -q_1],\ \ldots,\ P + (-1)^k \left[\sum_{i=1}^{k} p_i,\ -\sum_{i=1}^{k} q_i\right].$$

Zatem zmiana znaku po prostu zmienia kolejność sumowania odcinków. W dalszej części pracy z kontekstu będzie wynikało, jaki dokładnie jest pierwszy punkt łamanej.

3. Początkowe wyrazy ciągu skoków liczb Milnora

Przez dalszy ciąg pracy niech p i q będą względnie pierwszymi liczbami naturalnymi takimi, że $2 < p < q$. Z algorytmu Euklidesa wyznaczyć można liczby naturalne a, b takie, że $a < p, b < q$ oraz

$$bp - aq = (-1)^k \tag{3}$$

dla pewnej liczby naturalnej k. Przyjmijmy $n = [p/a]$ tzn. n jest całością z liczby p podzielonej przez a.

Przy powyższych oznaczeniach sformułujemy użyteczną własność.

Stwierdzenie 3.1 (Argument Parkietowy). *Rozważmy równoległobok $R(p, q)$ o wierzchołkach $(p, 0), (p - a, b), (0, q), (a, q - b)$. Rodzina*

$$\mathcal{R}(p, q) = \{R(p, q) + i\ [a, -b] + j\ [-(p - a), q - b] : \ i, j \in \mathbb{Z}\}$$

pokrywa całą płaszczyznę oraz równoległoboki z tej rodziny mają parami rozłączne wnętrza. Co więcej, krata $\mathbb{Z}^2$ to dokładnie zbiór wierzchołków równoległoboków należących do tej rodziny.

Dowód: W rzeczy samej, skoro pole równoległoboku $R(p, q)$ na mocy (3) wynosi $pq - [pq - (-1)^k(bp - aq)] = 1$, więc ze wzoru Picka wynika, że $R(p, q) \cap \mathbb{Z}^2$ to dokładnie jego cztery wierzchołki. Reszta jest łatwą konsekwencją tego faktu. ■

Pokażemy teraz jakie są początkowe wyrazy ciągu liczb Milnora dla osobliwości niezdegenerowanych postaci (1). Przy powyższych oznaczeniach mamy

Twierdzenie 3.2. *Dla diagramu $\triangle(p, q)$ ciąg skoków liczb Milnora rozpoczyna się od*

$$\underbrace{1,\ \dots\ ,\ 1}_{n},$$

jeśli $a \neq 1$ lub

$$\underbrace{1,\ \dots\ ,\ 1}_{p-1},$$

jeśli $a = 1$.

Dowód: Oznaczmy diagram jako $\triangle(P, Q)$. Rozważmy przypadek $bp - aq = -1$. Przyjmijmy

$$P_i = P - i\ [a, -b]$$

dla $i = 1, \dots, n$. Będziemy rozważali kolejno deformacje o diagramie wyznaczonym przez punkty $P, Q, P_1, \dots, P_i$ dla $i = 1, \dots, n$.

Ze wzoru Picka i równości (3) dostajemy, że podwojone pole trójkąta o wierzchołkach P, Q, P_1 wynosi 1. Zatem na mocy równości liczby Milnora i Newtona oraz wzoru (2) różnica liczb Milnora osobliwości o diagramie $\triangle(P, Q)$ i jej deformacji o diagramie $\triangle(P_1, Q) + \triangle(P, P_1)$ wynosi 1.

Załóżmy, że $a \neq 1$. Zauważmy, że $b(p-la)-a(q-lb) = -1$ oraz $p-la, q-lb \in \mathbb{N}$ dla $1 \leqslant l \leqslant n$. Ponadto punkty $P, P_1, \dots, P_n$ są współliniowe. Zatem diagram dla zbioru $P, Q, P_1, \dots, P_i$ jest postaci $\triangle(P_i, Q) + \triangle(P, P_i)$ dla $i = 1, \dots, n$. Stąd podwojone pole różnicy diagramów zbiorów $P, Q, P_1, \dots, P_i$ i $P, Q, P_1, \dots, P_{i+1}$ wynosi 1 na mocy wzoru Picka dla $i = 1, \dots, n - 1$. Stąd dostajemy tezę.

Dla $a = 1$ zauważmy, że $n = p$. Zatem powyższe własności zachodzą dla wszystkich i oprócz ostatniego, bo P_n leży na osi.

Analogicznie, jeśli $bp - aq = 1$ kładziemy $P_i = Q + i[a, -b]$ dla $i = 1, \dots, n$, przy czym w przypadku gdy $a = 1$ punkt P_n wykluczamy, gdyż leży pod osią x. ■

Przykład 3.3. Dla $p = 41$ i $q = 73$ z algorytmu Euklidesa mamy $a = 9, b = 16$ oraz $n = 4$. Ponadto $bp - aq = -1$, zatem zgodnie z przyjętymi w Sekcji 2 oznaczeniami wybieramy kolejno punkty $P_1 = (32, 16), P_2 = (23, 32), P_3 = (14, 48), P_4 = (5, 64)$. Otrzymujemy wtedy diagram $\triangle(5, 9) + 4\triangle(9, 16)$. Kolejne skoki to $1, 1, 1, 1$.

Zauważmy, że w szczególności z Twierdzenia 3.2 wynika, że

Wniosek 3.4. *Dla osobliwości postaci* (1) *jeśli*

$$l = (-1)^k \bmod m,$$

to ciąg skoków liczb Milnora rozpoczyna się od

$$\underbrace{1,\ \dots\ ,\ 1}_{\min\{l,m\}-1}.$$

Dowód: Wystarczy zauważyć, że $l = (-1)^k \bmod m$ wtedy i tylko wtedy gdy $nm - l = (-1)^{k+1}$ i zastosować drugą część Twierdzenia 3.2. ■

Jeśli $bp - aq = (-1)^k$ i $a \neq 1$, to dla liczb naturalnych

$$a_1 = p - na, \quad b_1 = q - nb$$

mamy

$$ab_1 - ba_1 = (-1)^{k+1}$$

oraz $a_1 < a, b_1 < b$. Połóżmy $n_1 = [a/a_1]$. Inaczej, można przyjąć, że a_1, b_1, n_1 są wyznaczone z algorytmu Euklidesa dla liczb a, b. Przy tych oznaczeniach mamy

Wniosek 3.5. *Rozważmy diagram $\triangle(p, q)$ taki, że $n = 1$. Ciąg skoków liczb Milnora rozpoczyna się od*

$$\underbrace{1,\ \dots\ ,\ 1}_{n_1+1},$$

jeśli $a_1 \neq 1$ lub

$$\underbrace{1,\ \dots\ ,\ 1}_{a},$$

jeśli $a_1 = 1$.

Dowód: Wystarczy zauważyć, że jeśli $n = 1$, to $a, b \neq 1$ (inaczej $p \leqslant 2$ wbrew założeniu), a_1 to reszta z dzielenia p przez a oraz b_1 to reszta z dzielenia q przez b. Zatem diagram Newtona zbioru P, Q, P_1 jest postaci

$$(-1)^k(\triangle(a, b) + \triangle(a_1, b_1)),$$

gdzie P_1 jest punktem jak w Twierdzeniu 3.2. Ponadto równanie $ab_1 - ba_1 = (-1)^{k+1}$ ma odwrotny znak niż $bp - aq = (-1)^k$. Zatem można zastosować Twierdzenie 3.2 do $\triangle(a, b)$, gdyż wybór punktów nie zmienia reszty diagramu (dokładniej, leżą na przedłużeniu odcinka QP_1 w przypadku k nieparzystego lub na przedłużeniu PP_1 w przypadku k parzystego). To daje tezę. ■

Twierdzenie 3.6. *Dla diagramu Newtona $\triangle(mp, mq)$ ciąg niezdegenerowanych skoków liczb Milnora rozpoczyna się od*

$$m, \underbrace{1, \ \ldots \ , \ 1}_{m-1}.$$

Dowód: Oznaczmy diagram jako $\triangle(P, Q)$. Rozważmy przypadek $bp - aq = -1$. Przyjmijmy

$$P_i = P - (i-1)\ [p, -q] - [a, -b]$$

dla $i = 1, \ldots, m$. Będziemy rozważali kolejno deformacje o diagramie wyznaczonym przez punkty $P, Q, P_1, \ldots, P_i$ dla $i = 1, \ldots, m$. Zauważmy, że punkty $P_1, \ldots, P_m$ leżą na prostej równoległej do odcinka PQ. Ze wzoru Picka i Argumentu Parkietowego punkt P_1 realizuje skok równy m, który jest najlepszym niezdegenerowanym skokiem, por. [1]. Diagram punktów $P, Q, P_1, \ldots, P_i$ to $\triangle(Q, P_i) + \triangle(P_i, P_1) + \triangle(P, P_1)$. Na mocy Argumentu Parkietowego dla $i = 2, \ldots, m$ jedynymi punktami kraty $\mathbb{Z}^2$ należącymi do trójkątów o wierzchołkach P_i, P_{i-1}, Q są ich wierzchołki. Zatem diagram punktów $P, Q, P_1, \ldots, P_{i-1}$ różni się od diagramu $P, Q, P_1, \ldots, P_i$ dokładnie o taki trójkąt. Dostajemy więc, że skok wynosi 1 dla każdego $i = 2, \ldots, m$. To daje tezę. ∎

Twierdzenie 3.7. *Dla diagramu Newtona $\triangle(p, mp)$ ciąg niezdegenerowanych skoków liczb Milnora rozpoczyna się od*

$$p - 1, \underbrace{1, \ \ldots \ , \ 1}_{p-1}.$$

Dowód: Oznaczmy diagram jako $\triangle(P, Q)$. Przyjmijmy

$$P_i = (0, mp - 1) + (i - 1)[1, -m]$$

dla $i = 1, \ldots, p$. Będziemy rozważali kolejno deformacje o diagramie wyznaczonym przez punkty $P, Q, P_1, \ldots, P_i$ dla $i = 1, \ldots, p$. Zauważmy, że punkty $P_1, \ldots, P_p$ leżą na prostej równoległej do odcinka PQ. Ze wzoru Picka i Argumentu Parkietowego punkt P_1 realizuje skok równy $p - 1$, który jest najlepszym niezdegenerowanym skokiem, por. [1]. Diagram punktów $P, Q, P_1, \ldots, P_i$ to

$$\triangle(P_1, P_i) + \triangle(P_i, P) = (i-1)\triangle(1, m) + \triangle(p - i + 1, (p - i + 1)m - 1).$$

Na mocy Argumentu Parkietowego dla $i = 2, \ldots, p$ jedynymi punktami kraty $\mathbb{Z}^2$ należącymi do trójkątów o wierzchołkach P_i, P_{i-1}, P są ich wierzchołki. Ponadto diagram punktów $P, Q, P_1, \ldots, P_{i-1}$ różni się od diagramu $P, Q, P_1, \ldots, P_i$ dokładnie o taki trójkąt. Dostajemy więc, że skok wynosi 1 dla każdego $i = 2, \ldots, p$. To daje tezę. ∎

Twierdzenie 1.1 wynika teraz łatwo z Twierdzeń 3.2, 3.6, 3.7 oraz Wniosku 3.5. Uzyskujemy w szczególności, że drugi skok liczb Milnora dla osobliwości o diagramie jednoodcinkowym dogodnym jest zawsze równy 1, co zostało pokazane wcześniej w [3].

Oczywiście powyższe rezultaty łatwo się uogólniają do przypadku niedogodnego (to znaczy do wszystkich izolowanych osobliwości semi-quasi-jednorodnych).

Literatura

[1] Justyna Walewska. Jumps of the Milnor numbers in families of non-degenerate and non-convenient singularities. In *Analytic and Algebraic Geometry*, Proceedings of Conference on Analytic and Algebraic Geometry. 2013.
[2] Arnaud Bodin. Jump of Milnor numbers. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 38(3):389–396, 2007.
[3] Justyna Walewska. The second jump of Milnor numbers. *Demonstratio Math.*, 43(2):361–374, 2010.
[4] A. G. Kouchnirenko. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Invent. Math.*, 32(1):1–31, 1976.
[5] S. Brzostowski and T. Krasiński. The jump of the Milnor number in the X_9 singularity class. *Cent. Eur. J. Math. (to appear).*

Remarks on the sequence of jumps of Milnor numbers

Summary. Consider a non-degenerated isolated singularity

$$f = \sum_{m\alpha + l\beta \geqslant lm} a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} y^{\beta}$$

such that $a_{l0}a_{0m} \neq 0$ and $l, m > 2$. We find the initial terms of the sequence of Milnor numbers of non-degenerate deformations of f such that the jump of Milnor number is minimal.

Faculty of Mathematics and Computer Science
University of Łódź
90-238 Łódź, Banacha 22
e-mail: Maria.Michalska@math.uni.lodz.pl, walewska@math.uni.lodz.pl

Łódź, 6 – 10 stycznia 2014 r.